



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien


Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

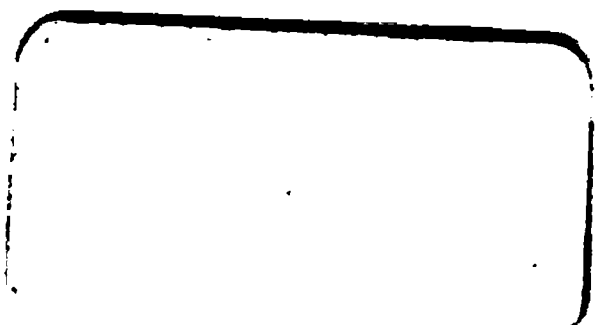
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



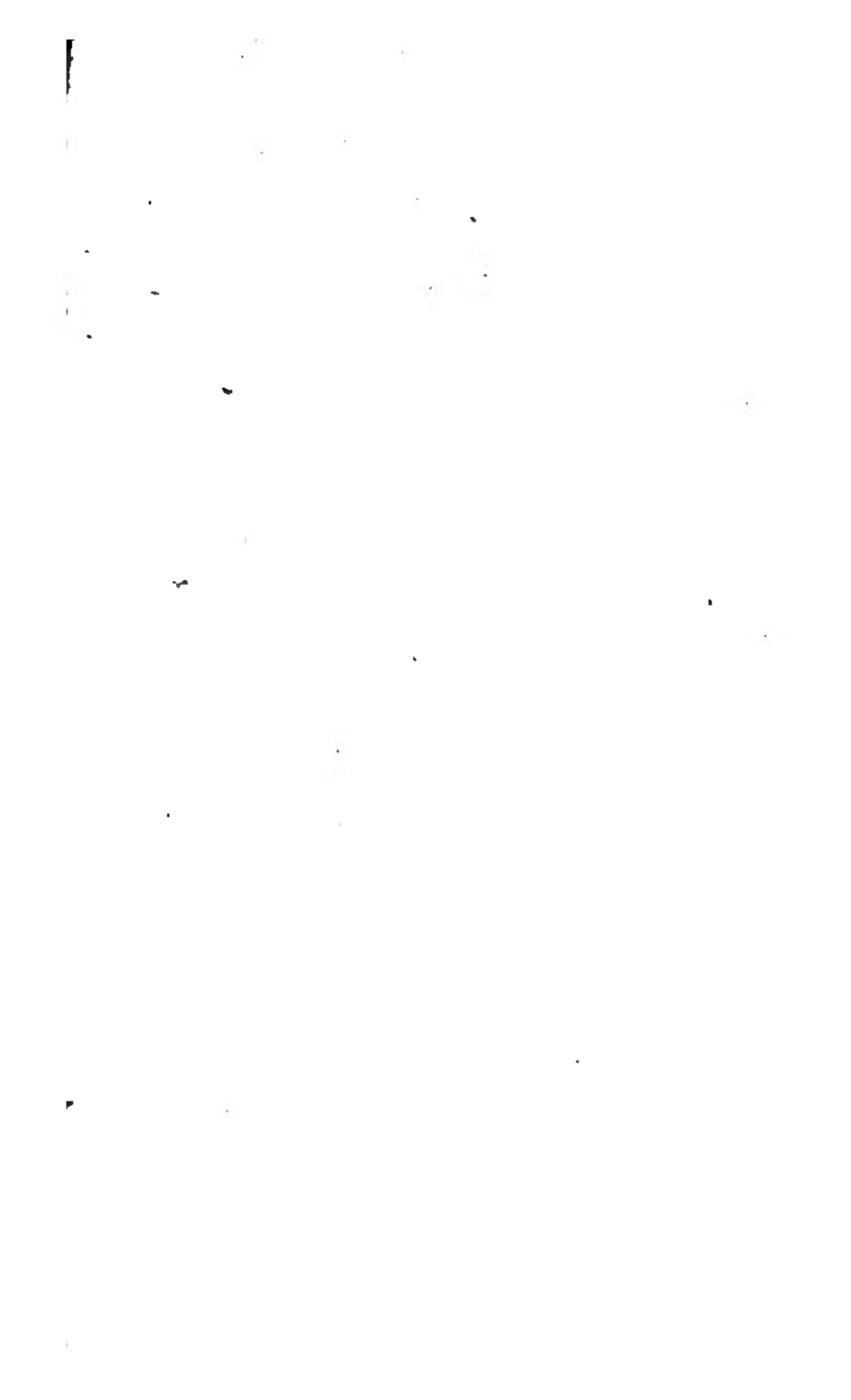
**K.F. WENDT LIBRARY  
UW COLLEGE OF ENGR.  
215 N. RANDALL AVENUE  
MADISON WI 53706**













# **H a n d b u c h** **der** **Statik fester Körper.**

**Mit**  
**vorzüglicher Rücksicht**  
**auf**  
**ihre Anwendung in der Architektur.**

---

**A u f g e s e t**  
**von**

**D. J. A. Entelwein,**

**Königl. Preuss. Ober-Landes-Baubirektor; Ritter des rothen Adlers  
und des L. niederländ. Löwenordens; ordentlichem Mitgliede der Aka-  
demie der Wissenschaften und des Senats der Akademie der Künste  
zu Berlin, des National-Instituts der Wissenschaften und Künste zu  
Amsterdam, der Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotter-  
dam, u. m. a. Gesellschaften Mitgliede.**

---

**Zweite Auflage.**

---

**Erster Band.**

---

**Mit elf Kupfertafeln.**

---

**Berlin.**

**Gebruckt und verlegt bei G. Reimer.**

**1832.**

200



196552

JUL 13 1915

61:8472

ST

EY8

T

# V o r r e d e

zur ersten Auflage.

Unter denjenigen Theilen der angewandten Mathematik, welche für den Baumeister als Hilfswissenschaften unentbehrlich sind, behauptet die Statik der festen Körper den ersten Rang. Soll diese Wissenschaft mit vorzüglicher Rücksicht auf Anwendung im bürgerlichen Leben vorgetragen werden, so ist ihr Umfang außerordentlich groß, und es wird sehr schwierig, bestimmte Grenzen zu ziehen, wenn ein Lehrbuch außer den allgemeinen Sätzen auch nur die nächsten Anwendungen auf besondere Fälle enthalten soll. Da man bei der Bearbeitung dieses Handbuchs nur vorzüglich Anwendungen auf Architektur zur Absicht hatte, so wird sich dadurch entschuldigen lassen, daß einige

Materialien mehr, andere weniger Ausdehnung erhielten, so wie es dem Bedürfniß angemessen zu seyn schien. Der mehrern Einfachheit wegen ist hier die ganze Statik auf den Lehrsatz vom Parallelogramme der Kräfte gegründet, dessen Beweis ich im Jahre 1804 ohne Beihülfe des Hebels bekannt machte. Hieraus ist, so weit es hier erforderlich war, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit gefolgert worden, weil sich dies vorzüglich durch seine Allgemeinheit und Einfachheit empfiehlt, um in schwierigen Fällen dem Praktiker, welcher nicht sogleich mit allen Hülfsmitteln der Statik vertraut ist, zur Führerin zu dienen, oder solches nach vollendeter Auflösung einer schwierigen Aufgabe als Prüfstein zu gebrauchen.

Die Untersuchung über die Reibung der Körper wird gewöhnlich in den Lehrbüchern in einer besondern Abtheilung, mit Anwendung auf einige Fälle, vorgetragen. Hier schien es zweckmäßiger, um die einzelnen Lehren nicht zu zerstreuen, und ihre Anwendung auf vorkommende Fälle zu erleichtern, gleich in jedem Kapitel; wie z. B. bei der schiefen Ebene, der Schraube, dem Räderwerke u. s. w., die Lehre von der Reibung mit den übrigen Lehren, so weit es erforderlich war,

zu verbinden. Besonders ist man bemüht gewesen, die Reibungen beim Räderwerke, bei den Zähnen, Rämmen und Daumen möglichst genau, und so weit solches zulässig war, durch einfache Ausdrücke anzugeben. Ohne bei demjenigen zu verweilen, was etwa diese Schrift neues enthält, und welches dem Kenner wahrscheinlich nicht entgehen wird, darf ich die schwierige Untersuchung über den Druck der Körper auf ihre Unterlagen, wenn deren mehr als zwei in einer graden Linie liegen, nicht unberührt lassen. Die Eulerschen Bemühungen, dieses Problem aufzulösen, sind bekannt, aber eben so leicht überzeugt man sich auch, daß solche für die Ausübung ohne Nutzen sind, weil sie das widersprechende Resultat geben, daß die von der Last entferntere Stütze einen stärkern Druck leidet, als die der Last näher gelegene. Bei der von mir gegebenen Auflösung dieses Problems, welches für den Architekten von so großer Wichtigkeit ist, mußte man wünschen, die Resultate eben so wie beim Parallelogramm der Kräfte, ohne Hülfe der höhern Analysis, zu erhalten. Dies hat aber bis jetzt nicht gelingen wollen. Es wäre zu weitläufig gewesen, diejenigen Versuche, welche die Uebereinstimmung dieses Gesetzes mit

den Erfahrungen beweisen, umständlich hier anzuführen, weshalb solches in einer besondern Abhandlung für die Denkschriften der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften geschehen ist. Nur die besondere Ansicht, daß diese Schrift vorzüglich für angehende Architekten bestimmt ist, wird es rechtfertigen lassen, daß die Lehren von den Gewölben und von der Festigkeit der Materialien ungewöhnlich ausgedehnt sind. Auch liegt hierin der Grund, weshalb die von mir angestellten mühsamen und weitläufigen Versuche über die Biegsamkeit und Festigkeit mehrerer Holzarten hier mitgetheilt worden sind, ob sie gleich nach meiner Meinung mehr der Physik als der Statik angehören.

Es war nicht möglich, die sämtlichen Lehren der Statik, so weit sie in der Architektur erfordert werden, ohne höhere Analysis vorzutragen, ob man gleich bemüht war, da, wo es ohne zu große Weitläufigkeit geschehen konnte, diese Rechnungsgart zu vermeiden, welches besonders vom ersten Abschnitte der Lehre von den Gewölben gilt. Damit aber dem ersten Anfänger und denjenigen, welche mit der höhern Analysis noch nicht vertraut sind, das Studium erleichtert werde, so

sind mehrere §. §., und selbst einige Abschnitte, mit einem Sternchen \* bezeichnet worden, welches anzeigt, daß diese Abtheilungen noch ausgesetzt bleiben können, bis nach fortgesetztem Studiren die Statik in dem ganzen hier gegebenen Umfange erlernt werden kann. Eben so war es nothwendig, zur Vermeidung einer unnützen Ausdehnung und zur Erleichterung für den Anfänger, bei vorkommenden analytischen Ausdrücken, eine Quelle anzuführen, wo man sich von der Richtigkeit der Formeln überzeugen könne. Da nun die mathematische Analysis von Pasquich größtentheils alle diejenigen Integralformeln entwickelt enthält, welche hier vorkommen, so hat man sich der Kürze wegen jedesmal auf diese Schrift bezogen. Nicht so konnte man bei der Lehre von denjenigen krummen Linien verfahren, deren Kenntniß hier als bekannt vorausgesetzt werden mußte, weil das Pasquichsche Lehrbuch nur auf die Kegelschnitte eingeschränkt ist, und weil man nicht leicht die hier erforderlichen Lehren in dem nöthigen Zusammenhange findet. Es ist deshalb im dritten Bande als Anhang die Theorie transcendenter krummer Linien, welche bei statischen Untersuchungen vorkommen, beigelegt worden.



Sämmtliche Maaße, bei welchen nichts besonders erinnert worden, beziehen sich auf das bei uns eingeführte brandenburgische Maaß, welches mit dem rheinländischen überein stimmt, und eben so sämmtliche Gewichte auf das berlinische Handelsgewicht.

(P. A. 1. B.) bedeutet den ersten Band, und (P. A.) den zweiten Band von Pasquich's mathematischer Analysis (Leipzig 1791).

Berlin, im Januar 1808.

J. A. C.

---

---

# **V o r r e d e**

**zur zweiten Auflage.**

---

Außer einigen Erweiterungen und Verbesserungen sind besonders dieser zweiten Auflage die neuern bekannt gewordenen wichtigen Versuche über die Festigkeit mehrerer Materialien beigelegt worden. Es wäre leicht gewesen dieser Auflage noch die ganz allgemeinen Lehren der Statik beizufügen. Hierdurch wäre aber der vorgesezte Zweck verloren gegangen, und es hätten alsdann andere dem Baumeister nicht unwichtige Untersuchungen weg bleiben müssen, wenn der Umfang des Handbuchs nicht unnöthig erweitert werden sollte. Für diejenigen angehenden Baumeister, welche aus besonderer Neigung die ganz allgemeinen Lehren der Statik studiren wollen, ist durch

die im Jahr 1826 herausgekommene schätzbare  
Statik fester Körper, von Grunert, hinlänglich  
gesorgt.

Die vorkommende Abkürzung: (S. A.) be-  
zieht sich auf meine Grundlehren der höhern  
Analysis.

Berlin, im Januar 1832.

J. A. Eutelwein.

---

---

# **I n h a l t**

## **d e s**

### **e r s t e n B a n d e s.**

---

#### **Einleitung.**

**Kraft. Widerstand. Druck. Richtung des Drucks.**

**Gleichgewicht. Geostatik.**

**Feste Körper. Materie. Masse. . . . . §. 1.**

**Schwere. Gewicht. Vertikallinie. Horizontallinie. §. 2.**

**Einerlei, entgegengesetzte und grade entgegengesetzte  
Richtung. . . . . §. 3.**

#### **I. Kapitel. Grundlehren der Statik, oder vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.**

**Die ersten Sätze vom Gleichgewichte unter mehreren  
Kräften. . . . . §. 4 — 9.**

**Mittlere Richtung. Mittelkraft. Seitenkräfte. Ge-  
genkraft. Zusammensetzung und Zerlegung der  
Kräfte. . . . . §. 10.**

**Aus den Seitenkräften die Mittelkraft zu finden. §. 11.**

**Durch Zeichnung. . . . . §. 12.**

**Die Richtung der Mittelkraft zu finden. . . . . §. 13.**

Parallelogramm der Kräfte. . . . .	§. 17.
Bedingungen für das Gleichgewicht unter drei Kräften. §. 19.	
Für mehrere Kräfte. . . . .	§. 24.
Momente der Kräfte. . . . .	§. 27.
Lage der Kräfte gegen irgend eine Linie. . . .	§. 29.
Wirkung einer Kraft auf eine Ebene. Einfallswin- kel. Normaldruck. . . . .	§. 31.
Parallelepipeden der Kräfte. . . . .	§. 32.
Mehrere Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen. §. 33.	
Grundgesetz der Statik für die Wirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt. . . . .	§. 35.

## II. Kapitel. Vom Gleichgewichte meh- rerer Kräfte, welche nicht auf einen ein- zigen Punkt wirken, oder vom Hebel und der Drehungsaxe.

Hebel. Ruhe- oder Drehpunkt. Angriffspunkt. Win- kelhebel. . . . .	§. 38.
Gleichgewicht zweier Kräfte am graden Hebel. .	§. 39.
Druck auf den Drehpunkt. . . . .	§. 40.
Auf die Unterlagen. . . . .	§. 41.
Gleichheit der Momente für mehrere Kräfte. .	§. 44.
Bestimmung der Lage des Drehpunkts. . . .	§. 45.
Gleichgewicht am Winkelhebel. . . . .	§. 48.
Bedingungsgleichungen für drei Kräfte nach verschie- denen Richtungen. . . . .	§. 49. 50.
Bestimmung der Richtungen dreier Kräfte, wenn solche nebst den Angriffspunkten am graden Hebel gege- ben sind. . . . .	§. 51.
Für zwei Kräfte am gebogenen Hebel. . . .	§. 52.
Gleichheit der Momente am gebogenen Hebel. .	§. 53.
Lage des Drehpunkts. . . . .	§. 56.
Wenn die Richtungen der Kräfte parallel sind. .	§. 57.



Druck auf den Drehpunkt des gebogenen Hebels.	§. 58.
Bedingungsgleichungen für Kräfte in einer Ebene.	§. 59.
Dreh- oder Bewegungsaxe. Are der Momente.	§. 60.
Kräfte wirken winkelmäßig auf eine Ebene.	§. 61.
Druck auf die Drehaxe.	§. 62. 63.
Kräfte, welche auf mehrere verbundene Ebenen wirken.	§. 64.
Druck auf die Drehaxe, wenn die Richtung der Kraft mit der Drehaxe in eine Ebene fällt.	§. 66—68.
Allgemeines Grundgesetz der Statik.	§. 69.

## III. Kapitel. Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper.

Dichtigkeit.	§. 71.
Eigenthümliches und absolutes Gewicht der Körper.	§. 72.
Des Wassers	§. 73.
Vergleichung zwischen Gewicht und Inhalt eines Körpers.	§. 74.
Tafel über das eigenthümliche Gewicht der Körper.	§. 75.

## IV. Kapitel. Vom Schwerpunkte.

Erklärung.	§. 76.
Den Schwerpunkt einzelner Gewichte in einerlei Ebene zu finden.	§. 77.
Wenn solche nicht in einerlei Ebene liegen.	§. 78.
Durchmesser und Ebene der Schwere.	§. 79.
Bei Linien, Flächen und Körpern.	§. 80.

### (I.) Vom Schwerpunkte der Linien.

Schwerpunkt vom Umfange des Kreises und jeder regelmäßigen Figur.	§. 81.
Vom Umfange eines Dreiecks.	§. 82.
Vom Kreisbogen.	§. 83—86.
Schwerpunkt einer jeden Kurve.	§. 87.

Des Parabelbogens . . . . .	§. 88.
Des Hyperbelbogens . . . . .	§. 89.
Des elliptischen Bogens. . . . .	§. 90 — 92.
Der Epikloide . . . . .	§. 93 — 94.
Der Kettenlinie. . . . .	§. 95.

## (II.) Vom Schwerpunkte ebener Flächen.

Des Dreiecks. . . . .	§. 96.
Abstand des Schwerpunkts eines Dreiecks von einer Axe. . . . .	§. 97.
Parallelogramm, Kreisfläche, regelmäßiges Vieleck. . . . .	§. 99.
Unregelmäßiges Viereck. . . . .	§. 100.
Fünfeck. . . . .	§. 101.
Unregelmäßiges Vieleck. . . . .	§. 102.
Trapez. . . . .	§. 103 — 104.
Kreisausschnitt. . . . .	§. 105 — 108.
Gewölbbogen zwischen concentrischen Kreis, bogen. . . . .	§. 109 — 111.
Kreisabschnitt. . . . .	§. 112 — 113.
Jede symmetrische Fläche. . . . .	§. 114 — 115.
Allgemeine Bestimmung für jede Fläche. . . . .	§. 116 — 117.
Parabelfläche. . . . .	§. 118.
Hyperbelfläche. . . . .	§. 119.
Elliptischer Abschnitt. . . . .	§. 120 — 122.
Elliptischer Gewölbbogen. . . . .	§. 123.
Abschnitt einer Epikloide. . . . .	§. 124.
Kettenfläche. . . . .	§. 125.
Jede unregelmäßige Fläche. . . . .	§. 126 — 127.

## (III.) Vom Schwerpunkte der Körper.

Cylinder. Prismen. . . . .	§. 128.
Pyramide. Regel. . . . .	§. 129. 130.
Abstand dieses Schwerpunkts von einer Ebene. . . . .	§. 131.
Abgestürzte Pyramide. . . . .	§. 132. 133.
Wenn solche ausgehöhlt ist. . . . .	§. 134 — 136.

Schief abgeschnittenes Prisma.	§. 137 — 138.
Schief abgeschnittenes Parallelepiped.	§. 139.
Halbkugel.	§. 140.
Kugelgewölbe.	§. 141.
Allgemeine Bestimmung.	§. 142 — 144.
Kugelabschnitt.	§. 145.
Kugelausschnitt.	§. 146.
Parabolisches Konoid.	§. 147.
Ausschnitt desselben.	§. 148.
Hyperbolisches Konoid.	§. 149.
Elliptisches Konoid.	§. 150.
Kettentkonoid.	§. 151.
Jeder unregelmäßige Körper.	§. 152 — 153.
Jeder Scheibe.	§. 154.
Guldins Regel.	§. 155.

## (IV.) Vom Schwerpunkte der Oberfläche eines Körpers.

Prisma. Cylinder. Pyramide. Regel.	§. 156.
Kugelabschnitt.	§. 157.
Allgemeine Bestimmung.	§. 158.
Kettentkonoid	§. 159.

## V. Kapitel. Von der Stabilität der Körper.

Erklärung.	§. 160.
Die Stabilität eines jeden Körpers zu finden.	§. 161.
Einer Mauer.	§. 162.
Mit Strebepfeiler.	§. 163 — 164.
Wenn der Querschnitt ein Trapez ist.	§. 165.
Mauer mit Plinthe.	§. 166 — 167.
Pfeiler. Cylinder.	§. 168.
Kugel.	§. 169.

## **xvi**      **Inhalt des ersten Bandes.**

### **VI. Kapitel. Von der Rolle, dem materiellen Hebel und der Wage.**

#### **(I.) Von der Rolle.**

Rolle. Spannung. . . . .	§. 170.
Feste und bewegliche Rolle. . . . .	§. 171.
Druck auf den Zapfen. . . . .	§. 172.

#### **(II.) Vom materiellen Hebel.**

Mathematischer und physischer Hebel. . . . .	§. 173.
Abstand des Stützpunkts. . . . .	§. 174.
Druck auf die Stützen. . . . .	§. 175.
Länge des Hebels. Kleinste Kraft. . . . .	§. 176.

#### **(III.) Von der Wage.**

Gleicharmige und Schnellwage. Röhmische und schwedische Wage. Ausschlag. . . . .	§. 177.
Eigenschaften. . . . .	§. 178.
Vermehrung des Ausschlags einer fertigen Wage. . . . .	§. 179.
Rasche Wagen. . . . .	§. 180.
Ungleiche Länge der Arme. Tarirung. . . . .	§. 181.
Schnellwage. . . . .	§. 182.
Vorhängegewicht. . . . .	§. 183.

### **VII. Kapitel. Von der Reibung.**

Erklärung. . . . .	§. 184.
Reibung der Ruhe, der Bewegung. Schiebende, drehende und rollende Reibung. . . . .	§. 185.
Resultate über die gleitende Reibung. . . . .	§. 186.
Reibungskoeffizient und Tafeln. . . . .	§. 187.
Reibung als Kraft. . . . .	§. 188.
Zusammenhängen der Schmiere. . . . .	§. 189.
Wälzende Reibung. . . . .	§. 190.

## VIII. Kapitel. Von der schiefen Ebene, dem Reile- und der Schraube.

### (I.) Von der schiefen Ebene.

Neigungswinkel, Grundlinie, Höhe, Normaldruck.

Relatives Gewicht. . . . . §. 191.

Größe des Normaldrucks und relativen Gewichts. §. 192—195.

Mit Rücksicht auf Reibung; zum Erheben. §. 196—198.

Zum Erhalten. . . . . §. 199.

Ruhewinkel, Reibungswinkel. . . . . §. 200.

Kleinste mögliche Kraft. . . . . §. 202.

Wenn die Kraft nicht durch den Schwerpunkt geht. §. 203—206.

Nach der Lehre vom Hebel. . . . . §. 207.

Nach dem Grundgesetze der Statik. . . . . §. 208.

Gleichgewicht für den Viertelkreis und Kreisbogen. §. 209—210.

Bedingungsgleichungen, wenn am Untertheile des Körpers

außer der Reibung keine andere Kraft wirkt. §. 211—213.

Die Leiter . . . . . §. 214—215.

### (II.) Vom Reile.

Erklärungen, Bedingungen für das Gleichgewicht. Re-

gel des Borelli, Mercenni und de la Hire. §. 216—217.

Mit Rücksicht auf Reibung. . . . . §. 218—219.

Eingeklemmte Körper. . . . . §. 220.

### (III.) Von der Schraube.

Erklärungen. . . . . §. 221.

Mittelwerth für die Neigung der Schraubengänge. §. 222.

Bedingungen des Gleichgewichts. . . . . §. 223—224.

Schraube ohne Ende. . . . . §. 225.

Bestimmung der Reibung. . . . . §. 226.

## IX. Kapitel. Vom Rade an der Welle.

Erklärungen. . . . . §. 227.

Verhältniß der Kraft zur Last. . . . . §. 228.

Lauftrad. . . . . §. 229.



Haspel mit Reibung. . . . .	§. 230 — 235.
Anwendung auf die feste Rolle. . . . .	§. 236.
Auf die bewegliche Rolle. . . . .	§. 237.
Verkürzung der Rechnung. . . . .	§. 238.
Reibung am stehenden Zapfen. . . . .	§. 239.
Tretscheibe. . . . .	§. 240.
Mit Reibung. . . . .	§. 241 — 242.

## X. Kapitel. Vom Räderwerke und der Gestalt der Zähne, Rämme und Daumen.

Erklärungen. . . . .	§. 243.
Gleichgewicht am Räderwerke. . . . .	§. 244 — 245.
Bedingungen für die beste Gestalt der Zähne und Rämme. . . . .	§. 246.
Stirnrad mit Zähnen und Getriebe mit Stöcke. . . . .	§. 247 — 249.
Zusammenstellung der Gleichungen zur Bestimmung der Größen bei der Anordnung der Zähne. . . . .	§. 250.
Die Länge des Zahns zu finden. . . . .	§. 251.
Lehre (Chablone) zu den Zähnen. . . . .	§. 252 — 253.
Reibung zwischen Zahn und Stock. . . . .	§. 254 — 255.
Gestalt der Stäbe und Zähne, wenn ein Kumpf vom Stirnrad getrieben wird. . . . .	§. 256 — 257.
Länge des Zahns. . . . .	§. 258.
Gestalt der Zähne und Stäbe, wenn ein Stirnrad vom Kumpfe umgetrieben wird. . . . .	§. 259.
Länge des Stabes. . . . .	§. 260.
Reibung zwischen den Zähnen. . . . .	§. 261 — 262.
Reibung gegen den Span der Zähne. . . . .	§. 263.
Gestalt der Zähne, wenn ein Getriebe durch ein Stirn- rad bewegt wird, und die erste Berührung vor der Mittelpunktslinie erfolgt. . . . .	§. 264.
Wenn ein Stirnrad durch ein Getriebe bewegt wird. . . . .	§. 265.
Rammrad und Trilling. . . . .	§. 266.
Gestalt der Rämme und Stöcke, wenn ein Trilling durch ein Rammrad getrieben wird. . . . .	§. 267.

Reibung zwischen den Rämmen und Stäben.	§. 268.
Rammrad und Getriebe mit Zähnen.	§. 269.
Gestalt der Zähne dieser Räder.	§. 270.
Reibung zwischen Zahn und Ramm.	§. 271.
Gezähnte Stange. Rammbaum.	§. 272.
Gestalt der Zähne und Stöcke beim Rammbaum, welcher einen Trilling bewegt.	§. 273.
Reibung.	§. 274.
Gestalt der Zähne und Stöcke, wenn der Trilling vom Rammbaume getrieben wird.	§. 275.
Reibung.	§. 276.
Gestalt der Zähne, wenn ein Getriebe einen Ramm- baum treibt.	§. 277.
Reibung.	§. 278.
Stampfer, Hebezapfen, Hebedaumen.	§. 279.
Anordnung der Daumen.	§. 280—281.
Reibung an den Scheidelatten und Daumen.	§. 282—283.
Theilung der Daumen.	§. 284.
Gestalt der Daumen, wenn die Theilung und Erhe- bungshöhe gegeben sind.	§. 285.
Wenn die Last nicht vertikal gehoben wird.	§. 286.
Die Last soll auf dem Daumen wieder herabsinken.	§. 287.
Gestalt der Daumen bei einer drehenden Bewegung des Widerstandes.	§. 288—291.
Wenn eine Stange einen Hebel drehen soll.	§. 292.
Gestalt der Einschnitte eines horizontalen Rades zur Bewegung eines Hebels.	§. 293.
Anmerkung.	§. 294.

## XI. Kapitel. Von den gespannten Seilen.

### (I) Von der Seilmaschine.

Erklärungen.	§. 295.
Drei Kräfte.	§. 296.
Der Ort wo ein Gewicht am aufgehängten Seile in Ruhe kommt.	§. 297—298.

Von drei Gewichten an einem Seile hängen zwei über Rollen. . . . .	§. 299.
Drei Kräfte und eben so viel Punkte in ihrer Richtung sind gegeben, man sucht die Richtungen. . . . .	§. 300.
Pressungen welche ein ziehendes Fard leidet. . . . .	§. 301—302.
Mehrere Kräfte welche an einem Seile nach verschiedenen Richtungen wirken. . . . .	§. 303.
Die Größe zweier Gewichte an einer Seilmaschine zu bestimmen. Seilwage. . . . .	§. 305.
Mehrere Kräfte nach parallelen Richtungen. . . . .	§. 306.
Gebogenes Seil. Kettenlinie. . . . .	§. 308.
Ort wo, ein Gewicht am aufgehängten Seile in Ruhe kommt, wenn das eine Ende über eine Rolle geht. . . . .	§. 309.
(II.) Von der Reibung eines um einen Cylinder gespannten Seils.	
Bestimmung der Kraft. . . . .	§. 311—312.
(III.) Von der Steifigkeit der Seile.	
Erklärungen. . . . .	§. 313.
Allgemeiner Ausdruck für die Steifigkeit. . . . .	§. 314.
Amonton's und Coulomb's Versuche. . . . .	§. 315—316.
Folgerungen. . . . .	§. 317—319.
Ausdruck zur Berechnung der Steifigkeit. . . . .	§. 320.
Bei einer festen Rolle. . . . .	§. 321.
Bei einer beweglichen Rolle. . . . .	§. 322.
Masse Seile. . . . .	§. 323.
(IV.) Von den Rollen- und Flaschenzügen.	
Erklärungen. . . . .	§. 324.
Kraft am Rollenzuge. . . . .	§. 325.
Mit Reibung. . . . .	§. 327.
Kraft am Flaschenzuge. . . . .	§. 329.
Mit Reibung. . . . .	§. 330.
Wenn die Durchmesser der Rollen verschieden sind. . . . .	§. 333.

**S t a t i k**  
**der**  
**f e s t e n K ö r p e r.**

---

**Erster Band.**



---

# E i n l e i t u n g.

---

## §. 1.

Die Ursache, durch welche ein Körper bewegt wird oder ein Bestreben zur Bewegung erhält, heißt Kraft (*Vis, Force*). Wirkt eine Kraft beständig auf einen Körper, so kann die Bewegung des Körpers durch einen Widerstand (*Resistentia, Résistance*) aufgehoben werden, nicht die Kraft. Das was alsdann der Widerstand leidet, heißt Druck (*Pressio, Pression*), und die grade Linie, nach welcher die Kraft den Körper bewegen würde, die Richtung (*Directio, Direction*) der Kraft oder des Drucks.

Sind mehrere Kräfte so an einem Körper angebracht, daß sich ihre Wirkungen aufheben und keine Bewegung des Körpers erfolgt, so sagt man: die Kräfte sind im Gleichgewicht (*Aequilibrium, Equi-*

*libre*). Die Wissenschaft, welche die Gesetze angiebt, nach welchen das Gleichgewicht unter mehrern an einem Körper angebrachten Kräften erfolgt, heißt die Statik (*Statica, Statique*), und wenn solche auf feste Körper eingeschränkt wird, die Geostatik oder Statik der festen Körper.

Unter festen Körpern werden hier solche verstanden; deren Theile so stark unter einander zusammenhängen, daß sie durch die angebrachten Kräfte nicht aus ihrer Verbindung oder Lage gebracht werden können. Dasselbe gilt von festen Ebenen und Linien.

Dasjenige was den Raum (*Spatium, Espace*) eines Körpers ausfüllt, nennt man seine Materie, und die Menge der Materie, welche in dem Körper enthalten ist, seine Masse.

So ist bei einer goldenen Kugel, Gold die Materie, die Kugel der Körper, und die Menge des Goldes die Masse.

## §. 2.

Die Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können; verursachen gegen ihre Unterlagen einen Druck, und wenn diese Unterlage weggenommen wird, so fallen sie. Die Ursache dieses Drucks und der Bewegung ist eine Kraft, welche die Schwere (*Gravitas, Gra-*

wie) genannt wird, so wie die Größe des Drucks, welchen ein Körper, vermöge der Schwere gegen seine Unterlage ausübt, sein Gewicht (*Pondus*, *Poids*) heißt.

Schwere und Gewicht sind demnach wie Ursache und Wirkung verschieden, daher in den Wissenschaften die Verwechselung dieser Wörter zu vermeiden ist, obgleich solche im gemeinen Leben sehr häufig vorkommt. Nach dem Sprachgebrauche sagt man von einem Körper, welcher mehr Gewicht als ein anderer hat, er sey schwerer; dieser uneigentliche Ausdruck, welcher ohne Einführung eines neuen Wortes nicht vermieden werden kann, muß daher nicht unrichtig verstanden werden. Anstatt schwerer könnte man besser gewichtiger sagen.

Wäre der Druck, welchen ein Gewicht gegen seine Unterlage äußert, eben so groß als die Wirkung irgend einer Kraft (einer Stahlfeder u. dgl.) gegen eben diese Unterlage, so ist es in Absicht der Wirkung auf diese Unterlage einerlei, ob das Gewicht oder die Kraft angebracht wird. In dieser Rücksicht kann man ein Gewicht als eine Kraft ansehen oder ihr gleich setzen, und nach der Größe des Drucks welchen eine Kraft gegen einen Widerstand ausübt, die Größe der Kraft welche diesen Druck verursacht ausmessen, so daß sich hiernach Kräfte durch Gewichte ausdrücken lassen. Es



wird daher eine Kraft welche unter übrigens gleichen Umständen einen  $n$  mal so großen Druck auf einen Widerstand verursacht als eine andere, auch  $n$  mal so groß seyn.

Die Richtung, nach welcher ein Körper frei fällt, oder die Linie, welche ein sehr dünner Faden anzieht, an welchem ein Körper frei herabhängt, heißt eine vertikale, lothrechte, bleirechte oder senkrechte Linie. Eine Ebene durch diese Linie gelegt, heißt eine Vertikalebene, so wie eine auf der Vertikallinie unter einem rechten Winkel stehende Linie, eine horizontale oder wagerechte Linie heißt. Horizontalebene bilden also mit der Vertikallinie rechte Winkel.

Man pflegt auch jede Linie, welche mit einer andern nicht wagerechten einen rechten Winkel bildet, eine senkrechte oder lothrechte Linie zu nennen. Es würde aber zweckmäßiger seyn, sie winkelrechte oder Normallinien zu heißen, um sie nicht mit den Vertikallinien zu verwechseln, welche nur allein auf einer Horizontalebene winkelrecht oder normal stehen.

### §. 3.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper nach parallelen Richtungen, so wird eine Ebene, welche auf einer dieser Richtungen winkelrecht steht, auch auf allen übrigen winkelrecht seyn, weil man sich eine jede Rich-

ung nach Belieben verlängert vorstellen kann. Strebt nun jede Kraft für sich, diese Ebene nach einerlei Seite fort zu bewegen, so sagt man von den Kräften: daß sie an verschiedenen Punkten nach einerlei Richtung angebracht sind. Wären die Richtungen parallel, aber einige von diesen Kräften strebten die Ebene nach der entgegengesetzten Seite fort zu bewegen, so sagt man, diese Kräfte wirken mit den übrigen nach einerlei, aber entgegengesetzten Richtungen. Fallen die entgegengesetzten Richtungen zweier Kräfte in einerlei grade Linie, so sind die Richtungen dieser Kräfte einander gerade entgegengesetzt.

Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß die Masse eines Körpers unter allen Umständen einerlei Gewicht behalte, oder daß die Schwere eine unveränderliche Kraft sey. Eben so werden die Richtungen der Schwere oder die Verticallinien als parallel mit einander angenommen.

Wenn gleich die Schwere nicht als eine unveränderliche Kraft angesehen werden kann, weil sie von den Polen nach dem Aequator und in größeren Abständen vom Mittelpunkt der Erde abnimmt: so kann solche doch für die Abstände derjenigen Körper unter einander, welche bei den folgenden Untersuchungen in Betrachtung kommen, als unveränderlich angesehen werden. Um einigermaßen zu beur-

theilen, wiewfern die angenommene Voraussetzung statthaft ist, so folgt aus Gründen, welche hier nicht auseinander gesetzt werden können, daß derselbe Körper, welcher in Berlin seine Unterlage mit einem Gewichte von 100000 Pfund drückt, in Paris nur einen Druck von 99969, und unter dem Aequator nur von 99638 Pfund ausüben wird; dagegen dieser Körper unter den Polen einen Druck von etwa 100178 Pfund verursacht. Die Voraussetzung paralleler Vertikallinien in der Statik, läßt sich eben so leicht rechtfertigen. Denn so fern sich zwei Vertikallinien im Mittelpunkte der Erde schneiden, so ist doch für die Abstände, unter welchen hier Körper betrachtet werden, der Durchschnittspunkt so weit entfernt, daß man diese Vertikalen ohne Bedenken als parallel annehmen kann.

---

---

## Erstes Kapitel.

### Grundlehren der Statik, oder vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

---

#### §. 4.

Im Punkte A Figur 1. der graden, festen, unbiegsamen und gewichtlosen Linie AB, sey eine Kraft P nach der Richtung AB angebracht. Befindet sich nun am Ende B der Linie AB irgend ein Widerstand MN, welcher verhindert, daß sich diese Linie nicht fortbewegen kann, so wird der Punkt B so stark gegen den Widerstand in B drücken, als wenn die Kraft P unmittelbar in B nach derselben Richtung angebracht wäre. Wollte man annehmen, der Druck bei B sey kleiner als bei A, so müßte ein Theil der Kraft P vernichtet worden seyn, wozu kein Grund vorhanden ist. Eben so wenig läßt sich annehmen, daß der Druck bei B größer als bei A sey, weil es an einer Ursache zur Vergrößerung dieses Drucks fehlt. Es ist daher

Taf. I.  
Fig. 1.

in Absicht auf den Druck bei B einerlei, in welchem Punkte der Linie AB die Kraft P nach der Richtung AB wirkt.

Verlängert man die Richtung AB nach BC, und BC ist eine feste, gewichtlose Linie oder ein unausdehnbarer, gewichtloser Faden, welcher mit dem Punkt B unzertrennlich verbunden ist, so wird aus gleichen Gründen, wenn die Kraft P im Punkte C nach der Richtung AC angebracht wird, der Punkt B nach der Richtung BC eben so stark gedrückt werden, als wenn die Kraft P unmittelbar im Punkte B nach der Richtung AC angebracht wäre.

Hieraus folgt, daß bei unveränderter Richtung, die Wirkung einer Kraft auf einerlei Punkt eines festen Körpers unverändert bleibt, in welchem Punkte ihrer Richtung diese Kraft auch angebracht werden mag, wenn nur der Punkt, an welchem die Kraft unmittelbar wirkt, mit dem festen Punkte des Körpers in eine unzertrennliche Verbindung gesetzt ist.

#### §. 5.

Mehrere Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken, erhalten den Punkt in Ruhe, wenn sie im Gleichgewichte sind. Wäre kein Gleichgewicht vorhanden, so muß sich der Punkt bewegen, und weil einerlei Punkt in derselben Zeit nur einerlei Weg durchlaufen kann, so kann auch die Richtung des Drucks, welche aus sämtlichen Kräften entspringt, nur nach einerlei Linie gehen.

§. 6.

Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt oder auf einen festen Körper nach grade entgegengesetzten Richtungen wirken, heben sich auf oder halten einander im Gleichgewicht, weil durchaus kein Grund vorhanden ist, weshalb eine Kraft die andere überwälzigen sollte. Findet man umgekehrt, daß zwei Kräfte in grade entgegengesetzten Richtungen, ohne Mitwirkung einer dritten Kraft, einander im Gleichgewicht halten, so kann man hieraus auf die Gleichheit der Kräfte schließen.

Diese Gleichheit der Kräfte muß aber nur von ihren Wirkungen verstanden werden, wovon hier allein die Rede ist.

Sind die beiden Kräfte, welche auf einen gemeinschaftlichen Punkt in grade entgegengesetzter Richtung wirken, ungleich, so kann kein Gleichgewicht erfolgen. Soll daher ein Punkt, auf welchen eine Kraft wirkt, in Ruhe bleiben, so muß eine eben so große Kraft nach grade entgegengesetzter Richtung wirken. Findet dies nicht statt, so kann auch kein Gleichgewicht erfolgen.

§. 7.

Mehrere Kräfte, welche nach einerlei Richtung auf einen gemeinschaftlichen Punkt wirken, vereinigen sich zu einer einzigen Kraft, welche der Summe dieser Kräfte gleich ist; daher wird auch eine einzige eben so große Kraft, nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht, mit sämtlichen Kräften im Gleichgewichte seyn. Verursacht z. B. die eine Kraft einen Druck  $P$ , und die andere nach derselben Richtung einen

Druck  $mP$ , so ist der gesammte Druck  $(n + m)P$  und eine Kraft  $= (n + m)P$  nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, ist mit den beiden Kräften  $nP$  und  $mP$  im Gleichgewichte.

### §. 8.

Wenn verschiedene an einem freien Punkte angebrachte Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, und man fügt neue Kräfte hinzu, welche ebenfalls unter sich das Gleichgewicht halten, so müssen sämtliche Kräfte unter einander im Gleichgewichte seyn, weil kein Grund vorhanden ist, weshalb dasselbe gestört werden sollte. Eben so läßt sich einsehen, daß, wenn mehrere Kräfte im Gleichgewichte sind, und man einige von denselben, die unter sich im Gleichgewichte stehen, wegnimmt, hiedurch das Gleichgewicht der übrig bleibenden Kräfte nicht gestört werden könne.

### §. 9.

Findet unter mehrern nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften ein Gleichgewicht statt, so muß dasselbe auch noch bestehen, wenn jede einzelne Kraft doppelt oder gleichvielfach wirkt, oder wenn von jeder einzelnen Kraft die Hälfte oder ein bestimmter Theil des Ganzen genommen wird. Dieses läßt sich sogleich mit Hülfe des vorigen §. einsehen, es folgt daher ganz allgemein, daß wenn sich mehrere Kräfte im Gleichgewichte befinden, so werden auch andere Kräfte im Gleichgewichte seyn, wenn sie den erstern proportional sind, und in eben den Richtungen gegen einander wirken.

Wären die drei Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , welche nach verschiedenen Richtungen an einem Punkte wirken, mit einander im Gleichgewichte, so wird dies auch von den Kräften  $p$ ,  $q$ ,  $r$  gelten, wenn sie nach gleichen Richtungen an einem Punkte angebracht sind, und wenn sich  $p : q : r$  wie  $P : Q : R$  verhalten.

Auch ist es leicht, wenn eine von den Kräften  $p$ ,  $q$ ,  $r$  gegeben ist, die beiden übrigen mit Hülfe der bekannten Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  zu finden. Wenn z. B.  $r$  gegeben wäre, so hat man

$$R : P = r : p \text{ und } R : Q = r : q, \text{ daher ist}$$

$$p = \frac{r}{R} P \text{ und } q = \frac{r}{R} Q.$$

### §. 10.

Zwei Kräfte  $P$ ,  $Q$  die nach Richtungen  $GP$ ,  $GQ$ , Figur 2. a, welche nicht in eine grade Linie fallen, auf einen Punkt  $G$  wirken, können einander nicht im Gleichgewichte erhalten; denn setzt man voraus daß sie im Gleichgewichte wären, so müßte jede dritte Kraft  $P'$  welche auf diesen Punkt wirkte, denselben nach ihrer Richtung fort bewegen (§. 5.). Nimmt man nun  $P' = P$  und bringt  $P'$  in grade entgegengesetzter Richtung von  $P$  an, so sind  $P$  und  $P'$  im Gleichgewichte (§. 6.), daher muß sich der Punkt  $G$  nach der Richtung der Kraft  $Q$  bewegen. Da er sich aber auch nach der Richtung der Kraft  $P'$  bewegen, also zwei ganz verschiedene Richtungen durchlaufen soll, welches unmöglich ist, so folgt hieraus, daß sich die Kräfte  $P$  und  $Q$  unter dem Winkel  $PGQ$  nicht im Gleichgewichte halten können. Es muß daher von beiden Kräften ein Druck nach irgend einer Richtung  $GR$  entste-

Taf. I.  
Fig. 2. a.

Fig. 2. b.



hen, und weil die Richtungen beider Kräfte  $P$ ,  $Q$  in einerlei Ebenen fallen, so muß auch die Richtung  $GR$  in derselben Ebene liegen. Denn wollte man annehmen, daß die Richtung  $GR$  mit der Ebene in welcher die Kräfte  $P$ ,  $Q$  wirken, einen Winkel einschließt, so müßte aus gleichen Gründen auch auf der andern Seite der Ebene eine Richtung wie  $GR$  entstehen. Weil aber einerlei Punkt  $G$  nicht zugleich verschiedene Wege durchlaufen kann, so muß die Richtung  $GR$  mit den Richtungen der Kräfte  $P$ ,  $Q$  in einerlei Ebene liegen. •

Die Richtung  $GR$  nach welcher sich der Punkt  $G$  durch die Wirkung der beiden Kräfte  $P$ ,  $Q$  fort zu bewegen strebt, heißt die mittlere Richtung dieser Kräfte, und eine dritte Kraft  $R$ , welche den Punkt  $G$  nach der Richtung  $GR$  eben so drückt als die beiden Kräfte  $P$ ,  $Q$ , heißt die Mittelkraft (*Vis composita. Force résultante*) von den Seitenkräften (*Vires componentes. Forces composantes.*)  $P$ ,  $Q$ .

Der Winkel  $PGR = \varphi$ , welchen die Richtung der Mittelkraft  $R$  mit der Richtung der Seitenkraft  $P$  einschließt, heißt ein Richtungswinkel der Mittelkraft und der Winkel  $PGQ$ , der Richtungswinkel der Seitenkräfte.

Weil die Mittelkraft  $R$  den Punkt  $G$  eben so stark nach  $GR$  drückt wie die Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$ , so muß auch eine Kraft  $R' = R$ , welche nach einer der Mittelkraft grade entgegengesetzten Richtung  $RG$  angebracht wird, den Punkt  $G$  in Ruhe erhalten, wenn

an demselben keine anderen Kräfte als P und Q wirken. Die Kraft R' welche sich mit den Kräften P, Q im Gleichgewichte befindet, heißt die Gegenkraft, um sie von der gleich großen Mittelkraft zu unterscheiden. Daher sind unter diesen Umständen die drei Kräfte P, Q, R' am Punkt G im Gleichgewichte; oder die Seitenkräfte sind mit der Gegenkraft im Gleichgewichte, wenn letztere an dem gemeinschaftlichen Punkte G nach grade entgegengesetzter Richtung der Mittelkraft angebracht wird. Eben so folgt aus dem Vorhergehenden, daß man in Absicht des Drucks auf den Punkt G, anstatt der Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R nach ihrer Richtung G R, oder anstatt dieser die Seitenkräfte P, Q nach ihren Richtungen anbringen kann.

Weil die Gegenkraft R' der Mittelkraft R gleich ist, aber eine grade entgegengesetzte Lage hat, so muß in den Fällen wo durch Rechnung die Gegenkraft aus der Mittelkraft bestimmt werden soll,  $R' = -R$  gesetzt werden.

Findet man aus den Seitenkräften die Mittelkraft, so nennt man dies die Mittelkraft aus den Seitenkräften zusammensetzen (*Compositio virium. Composition des Forces*). Werden hingegen aus der Mittelkraft die Seitenkräfte gefunden, so sagt man die Mittelkraft ist in die Seitenkräfte zerlegt worden (*Resolutio virium. Décomposition des Forces*).

Wird hier und in der Folge nicht besonders erinnert daß die Richtungen der Kräfte in einerlei Ebene liegen, so wird dies jedesmal vorausgesetzt. Auch soll

jeder Punkt auf welchen Kräfte wirken, als ein frei beweglicher Punkt gelten, wenn nicht das Gegentheil angeführt wird.

## §. 11.

Zaf. I.  
Fig. 3.

**Aufgabe.** Die beiden Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$  Figur 3. wirken auf den Punkt  $G$  nach Richtungen  $GP$ ,  $GQ$ , welche sich unter dem rechten Winkel  $PGQ$  schneiden. Man fragt wie groß die Gegenkraft  $R$  seyn wird, welche den gegebenen Seitenkräften das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** Es sey  $RG$  die Richtung der Gegenkraft  $R$ , welche mit der Seitenkraft  $P$  irgend einen Winkel  $PGR = \varphi$  einschließt. Man ziehe durch  $G$  auf  $GR$  die Linie  $qp'$  winkelrecht, so ist der Winkel  $qGP = RGQ = 90^\circ - \varphi$ . Da nun die Linie  $GP$  gegen  $GR$  und  $Gq$  eben die Lage hat, wie  $GR$  gegen  $GP$  und  $GQ$ , und weil  $R$  mit  $P$  und  $Q$  im Gleichgewichte ist, also auch nach entgegengesetzter Richtung als Mittelkraft von  $P$ ,  $Q$  angenommen werden kann, so müssen sich auch zwei Kräfte  $p$ ,  $q$  nach den Richtungen  $GR$ ,  $Gq$  angeben lassen, welche eben so viel wirken als die Kraft  $P$  nach der Richtung  $GP$ , oder  $P$  läßt sich in die Kräfte  $p$ ,  $q$  zerlegen. Denn eben so wie  $R$  die Gegenkraft, oder in entgegengesetzter Richtung die Mittelkraft von  $P$ ,  $Q$  ist, so läßt sich  $P$  als Mittelkraft von  $p$ ,  $q$  ansehen, und weil  $R$  gegen  $P$ ,  $Q$  eben die Lage hat, wie  $P$  gegen  $p$ ,  $q$ , so verhält sich (§. 9.).

$R : P = P : p$  also ist  $p = \frac{P^2}{R}$  und

$R : Q = P : q$  also ist  $q = \frac{P \cdot Q}{R}$

Ferner ist der Winkel  $Q G p' = \phi$ ; man kann daher auch  $Q$  als eine Mittelkraft ansehen, und solche in die Seitenkräfte  $p'$ ,  $q'$  nach  $G p'$ ,  $G R$  zerlegen, weil  $Q$  gegen  $p'$ ,  $q'$  eben die Lage hat wie  $R$  gegen  $P$ ,  $Q$ . Hiernach verhält sich

$R : P = Q : p'$  also ist  $p' = \frac{P \cdot Q}{R}$  und

$R : Q = Q : q'$  also ist  $q' = \frac{Q^2}{R}$ .

Wenn daher  $R$  mit  $P$ ,  $Q$  im Gleichgewichte ist, so können die Kräfte  $P$  und  $Q$  weggenommen und anstatt derselben die Kräfte  $p$ ,  $q$  und  $p'$ ,  $q'$  angebracht werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 10.). Es ist aber  $q = p'$  weil beide  $= \frac{P \cdot Q}{R}$  sind, daher können auch diese beide Kräfte weggenommen werden (§. 8.), und es müssen noch die Kräfte  $p$  und  $q'$ , welche nach  $G R$  wirken, der Kraft  $R$ , welche ihnen grade entgegen nach  $R G$  wirkt, das Gleichgewicht halten und ihr gleich seyn, (§. 5.) daher ist

$$R = p + q' = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} = \frac{P^2 + Q^2}{R} \text{ oder}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Hieraus folgt, daß wenn sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden, so muß das Quadrat der Mittelkraft oder der Gegenkraft, der Summe von den Quadraten der Seitenkräfte gleich seyn.

## §. 12.

Zaf. I.  
Fig. 4.

Die Größen und Richtungen mehrerer Kräfte lassen sich bequem durch Längen und Lagen grader Linien vorstellen, und so oft die für sämtliche Kräfte gemeinschaftliche Einheit in jeder einzelnen Kraft enthalten ist, so oft muß auch irgend eine grade Linie, welche als Einheit angenommen wird, in jeder der Linien, welche die einzelnen Kräfte darstellen, enthalten seyn. Stellt z. B. die Linie  $GA$  Figur 4. die Größe und Richtung einer Kraft  $P$  und  $GB$  einer Kraft  $Q$  vor, so ist, wenn  $GB = \frac{2}{3} GA$  ist, auch  $Q = \frac{2}{3} P$ , und überhaupt  $P:Q = GA:GB$ .

Hieraus sieht man, wie fern es erlaubt ist,  $AG$  mit der Kraft  $P$  zu verwechseln, und  $AG = P$  und  $BG = Q$  zu setzen.

Auch kann man zur Vergleichung der Kräfte untereinander, die Größe derselben durch Zahlen ausdrücken, welche sich auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen.

## §. 13.

Zaf. I.  
Fig. 6.

Zwei gleiche Kräfte  $P, Q$ , deren Größe und Richtung durch die Linien  $GP, GQ$  Figur 5. ausgedrückt werden, wirken unter einem rechten Winkel  $PGQ$  auf den Punkt  $G$ ; man zeichne das Quadrat  $PGQR$ , so wird die Diagonale  $GR$  die Größe und Richtung der Mittelkraft  $R$  vorstellen.

**Beweis.** Aus §. 11. folgt, daß  $GR$  die Größe der Mittelkraft  $R$  ist. Ferner sind die Kräfte  $P, Q$  einander gleich, also muß hier von der Wirkung, welche

P hervorbringt, eben das gelten, was von der Wirkung der Kraft Q gilt, daher muß auch die Richtung GP gegen GR eben die Lage haben wie GQ gegen GR, oder die Winkel PGR und QGR müssen einander gleich seyn. Wollte man annehmen, RG wäre nicht die gesuchte Richtung, so müßte eine von den beiden Kräften P, Q den Punkt G mehr nach sich ziehen als die andere, welches aber aus gleichen Gründen von der andern Kraft gelten müßte. Daher, weil einerlei Punkt nicht verschiedene Wege zugleich durchlaufen kann (§. 5.), so kann die mittlere Richtung GR nur eine solche Lage erhalten, daß sie mit den Richtungen der Seitenkräfte gleiche Winkel bildet; folglich ist jeder von den beiden Richtungswinkeln der Mittelkraft, die Hälfte eines rechten Winkels oder  $PGR = RGQ = 45^\circ$ .

§. 14.

Die Richtungen zweier Seitenkräfte P, Q, welche im Punkte G Figur 4. nach GA und GB wirken, schneiden sich unter einem rechten Winkel AGB. Man nehme  $GA = P$  und  $GB = Q$ , ziehe AB, so ist im rechtwinklichten Dreieck AGB,  $AB^2 = AG^2 + GB^2$ , daher wenn R die Größe der Mittelkraft von P, Q bezeichnet, so ist  $AB = R$  (§. 11.) Man kann also durch das rechtwinklichte Dreieck die Größe der Kräfte P, Q, R für das Gleichgewicht darstellen, nur bleibt die Lage von der Richtung der Mittelkraft gegen die Richtungen der Seitenkräfte noch ungewiß.

Tab. I.  
Fig. 4

Wird im rechtwinklichten Dreieck  $ABG$  der Winkel, welchen die Seitenkraft  $GA = P$  mit der Hypothenuse  $AB$  einschließt, oder  $GAB = \alpha$  gesetzt, so ist

$$GA = AB \cos \alpha \text{ und } GB = AB \sin \alpha \text{ oder}$$

$$P = R \cos \alpha \text{ und } Q = R \sin \alpha.$$

Es kann daher, wenn der Winkel  $\alpha$  bekannt ist, welchen die Seitenkraft  $P$  mit der Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks einschließt, welches aus den Kräften  $P, Q, R$  entsteht, mit Hülfe der Mittelkraft  $R$ , eine jede von den Seitenkräften  $P, Q$  gefunden werden, vorausgesetzt, daß letztere unter einem rechten Winkel wirken.

Zur Abkürzung soll der Winkel  $\alpha$  ein Hypothenusenwinkel heißen. Ist daher für drei Kräfte  $P, Q, R$  die Kraft  $P = R \cos \alpha$  und  $Q = R \sin \alpha$ , so ist  $\alpha$  der Hypothenusenwinkel dieser Kräfte.

### §. 15.

Es werde vorausgesetzt, daß an dem Punkte  $G$   
 Ref. 1. Figur 6. die Seitenkräfte  $P, Q$  nach den auf einan-  
 Fig. 6. der winkelrechten Richtungen  $GP, GQ$  angebracht,  
 und durch  $R$  ihre Mittelkraft nach der Richtung  $GR$   
 bezeichnet werde, wenn die Kraft  $R$  mit  $P$  den Richtungs-  
 winkel  $PGR = \varphi$  einschließt. Ist nun ferner  
 für die gegebenen Kräfte  $P, Q, R$  der Hypothenusen-  
 winkel  $= \alpha$  (§. 14.), so läßt sich für den Fall, daß  
 die Mittelkraft  $R$  in die beiden auf einander winkel-  
 rechten Seitenkräfte  $P'$  und  $Q'$  unter dem Richtungs-

Winkel  $P'GR = 2\Phi$  zerlegt werde, der zu den Kräften  $P', Q', R$  gehörige Hypothenusenwinkel finden.

Es ist der Winkel  $PGP' = PGR = \Phi$  und wenn  $P'G$  nach  $q'$  verlängert wird, so sind, wenn  $GQ'$  auf  $P'q'$  winkelrecht steht,  $P'GQ', Q'Gq'$  rechte Winkel, und man kann mittelst des bekannten Verhältnisses der Kräfte  $P, Q, R$ , die Kraft  $P$  als Mittelkraft, in die Seitenkräfte  $p, q$  nach  $GP', GQ'$  und  $Q$  als Mittelkraft, in die Seitenkräfte  $p', q'$  nach  $GQ', Gq'$  zerlegen. Alsdann ist (§. 8.)

$$R : P = P : p \text{ also } p = \frac{P^2}{R}$$

$$R : Q = P : q \quad q = \frac{P \cdot Q}{R}$$

$$R : P = Q : p' \quad p' = \frac{P \cdot Q}{R}$$

$$R : Q = Q : q' \quad q' = \frac{Q^2}{R}$$

Da nun die Kräfte  $p, q, p', q'$  eben die Wirkung wie  $P, Q$  hervorbringen (§. 10.), so kann man  $P, Q$  wegnehmen, und dafür die Kräfte  $p, q, p', q'$  nach den angegebenen Richtungen anbringen, von welchen alsdann  $R$  die Mittelkraft ist. Man setze

$$p - q' = P' \text{ und } q + p' = Q'$$

so ist auch  $R$  die Mittelkraft von  $P', Q'$  und bildet mit der Seitenkraft  $P'$  den Richtungswinkel  $RGP' = 2\Phi$ .

Es ist aber

$$P' = p - q' = \frac{P^2 - Q^2}{R} \text{ und}$$

$$Q' = q + p' = \frac{2P \cdot Q}{R}$$



Nach §. 14. ist ferner

$$P = R \cos \alpha \text{ und } Q = R \sin \alpha, \text{ daher}$$

$$P^2 - Q^2 = R^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = R^2 \cos 2 \alpha \text{ und}$$

$$2 P Q = 2 R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2 \alpha \text{ oder}$$

$$P' = R \cos 2 \alpha \text{ und } Q' = R \sin 2 \alpha$$

daher ist (§. 14.)  $2 \alpha$  der Hypothenusenwinkel für die Kräfte  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R$ .

Es folgt also hieraus daß wenn eine Mittelkraft  $R$  den Richtungswinkel  $\Phi$  und Hypothenusenwinkel  $\alpha$  mit einer Seitenkraft  $P$  einschließt, so wird dieselbe Mittelkraft  $R$ , wenn solche mit einer andern Seitenkraft  $P'$  den Richtungswinkel  $2 \Phi$  bildet, auch den Hypothenusenwinkel  $2 \alpha$  einschließen müssen.

Auch läßt sich eben so beweisen, daß wenn dieser Satz für  $n \Phi$  gilt, er auch für  $(n + 1) \Phi$  gelten müsse, wo  $n$  jede ganze Zahl bedeuten kann. Denn wenn für die Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$  Figur 7. die zugehörigen Richtungs- und Hypothenusenwinkel  $\Phi$  und  $\alpha$  sind, und wenn  $n \Phi$  und  $n \alpha$  ebendasselbe für die Kräfte  $P'$  und  $Q'$  bei einerlei Mittelkraft  $R$  bedeuten, so ist §. 14.

$$P = R \cos \alpha, \quad Q = R \sin \alpha;$$

$$P' = R \cos n \alpha, \quad Q' = R \sin n \alpha.$$

Für jede zwei andere Seitenkräfte  $P''$ ,  $Q''$  sei  $(n + 1) \Phi$  der Richtungswinkel; so erhält man auf eine ähnliche Art wie oben, wenn die Kräfte  $P'$  und  $Q'$  in die Seitenkräfte  $p$ ,  $q$  und  $p'$ ,  $q'$  zerlegt werden

$$R : P = P' : p \text{ und } R : P = Q' : p'$$

$$R : Q = P' : q \quad R : Q = Q' : q' \text{ also}$$

$$p - q' = \frac{PP' - QQ'}{R} = P'' \text{ und}$$

$$q + p' = \frac{QP' + PQ'}{R} = Q'' \text{ oder}$$

$$PP' - QQ' = R^2 (\cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha) = R^2 \cos (n + 1)\alpha$$

und

$$QP' + PQ' = R^2 (\sin \alpha \cos n\alpha + \cos \alpha \sin n\alpha) = R^2 \sin (n + 1)\alpha$$

folglich

$$P'' = R \cos (n + 1)\alpha \text{ und } Q'' = R \sin (n + 1)\alpha.$$

Nun gilt dieser Satz für  $n = 2$ , daher auch für  $n + 1 = 3$ , also auch für  $n = 4$ , u. s. w.

Dieser Beweis welcher für jede zwei ganze Zahlen gilt, muß auch für alle mögliche Brüche gelten, weil diese auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, als ganze Zahlen von kleinerer Einheit angesehen werden können. Er muß aber auch für irrationale Zahlen gelten, weil sich diese durch Brüche ausdrücken lassen, welche der Wahrheit so nahe kommen als erforderlich ist.

Es ist nun ganz allgemein erwiesen, daß wenn die Richtungs- und Hypothenusenwinkel zweier Seitenkräfte  $\Phi$  und  $\alpha$  sind, so werden zwei andere Seitenkräfte bei ungeänderter Mittelkraft noch im Gleichgewichte bleiben, wenn ihre Richtungs- und Hypothenusenwinkel  $n\Phi$  und  $n\alpha$  sind. Man setze  $n\Phi = \Phi'$  und  $n\alpha = \alpha'$ , so verhält sich

$$\Phi : \alpha = \Phi' : \alpha' \text{ oder es ist } \frac{\Phi}{\alpha} = \frac{\Phi'}{\alpha'}$$

Da nun dieser Satz ganz allgemein gilt,  $\Phi$  mag so groß oder klein als man nur immer will angenommen werden, so folgt, daß wenn in irgend einem Falle

Das Verhältniß zwischen  $\Phi$  und  $\alpha'$  bekannt ist, daraus für jeden andern Fall das Verhältniß zwischen  $\Phi$  und  $\alpha$  gefunden wird. Für  $\Phi' = 45^\circ$  ist  $\alpha' = 45^\circ$  (§. 13.) oder  $\frac{\Phi'}{\alpha'} = 1$ , daher ist ganz allgemein  $\frac{\Phi}{\alpha} = 1$  oder  $\Phi = \alpha$ .

Es muß daher die Richtung der Mittelkraft  $R$  mit den Richtungen ihrer Seitenkräfte  $P, Q$  eben die Winkel bilden, welche entstehen, wenn man diese drei Kräfte in ein Dreieck zusammenstellt, vorausgesetzt, daß sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden.

Kaf. I.  
Fig. 8.

Wenn daher im Rechteck  $GPRQ$  Figur 8. die Linien  $GP, GQ$  die Größen und Richtungen der Seitenkräfte  $P, Q$  vorstellen, so ist die Diagonale  $RG$  die Größe und Richtung der Mittelkraft  $R$ . Man kann also mit Hülfe eines Rechtecks aus den Seitenkräften die Mittelkraft, und aus der Mittelkraft die Seitenkräfte finden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Richtungen der Seitenkräfte auf einander winkelrecht stehen.

§. 16.

Fig. 9. 10.

Unter irgend einem Winkel  $PGQ$  Figur 9. und 10. wirken die Seitenkräfte  $P = GP$  und  $Q = GQ$ ; wird nun das Parallelogramm  $PGQR$  aus den Seiten  $GP, GQ$  ergänzt, so ist die Diagonale  $GR$  die Größe und Richtung der Mittelkraft  $R$ .

Beweis. Man ziehe  $AB$  durch  $G$ ,  $PD$  aus  $P$ ,  $QE$  aus  $Q$  auf  $GR$  winkelrecht, und  $PA, QB$  mit  $DG$  parallel, so ist  $\triangle DPR = \triangle GEQ$ , daher  $GB = EQ = PD = AC$  und  $GE = RD$ .

Nun zerlegt sich  $GP = P$  in die Seitenkräfte  $GA$  und  $GD$ , und  $GQ = Q$  in die Seitenkräfte  $GB$  und  $GE$ . Aber die Kräfte  $GA$  und  $GB$  heben sich auf, weil sie einander gleich und grade entgegengesetzt sind, daher bleibt noch  $GD + GE = GR$  die Größe und Richtung einer Kraft, welche eben so viel wie  $P$  und  $Q$  wirkt; es ist daher die Kraft  $GR = R$  die den Seitenkräften  $P, Q$  entsprechende Mittelkraft, welche nach der Richtung  $GR$  wirkt, oder wenn man die Kraft  $R$  nach entgegengesetzter Richtung  $RG$  anbringt, so ist  $GR = R$  als Gegenkraft mit den Seitenkräften  $P, Q$  im Gleichgewichte.

Fällt die winkelrechte Linie  $AB$  unterhalb der Linie  $GQ$  Figur 11., so muß  $EG$  von  $GD$  abgezogen werden, weil die Kräfte  $EG$  und  $GD$  nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und sich zum Theil aufheben. Alsdann ist  $GD - GE = GR = R$ .

Ref. B  
Fig. 11.

### §. 17:

Zusatz. Wenn umgekehrt die Richtungen  $GP$  und  $GQ$ , Figur 9. der unbekannten Seitenkräfte, und die Richtung  $GR$  ihrer unbekannten Mittelkraft gegeben sind, und man zeichnet mittelst dieser drei Richtungen das Parallelogramm  $GPQR$ , so kann man behaupten, daß die den Richtungen  $GP$  und  $GQ$  entsprechenden Seitenkräfte  $P$  und  $Q$ , sich wie die Seiten  $GP$  und  $GQ$  des Parallelogramms verhalten, oder daß

Ref. L  
Fig. 9.

$$P : Q = GP : GQ.$$

Wollte man annehmen, daß sich  $P$  zu  $Q$  nicht wie

$GP$  zu  $GQ$  verhalte, sondern wie  $Gp : GQ$ , so zeichne man das Parallelogramm  $GprQ$  und ziehe die Diagonale  $Gr$ , so ist diese die mittlere Richtung der Seitenkräfte  $P, Q$ ; welches der Voraussetzung, daß  $GR$  die mittlere Richtung sey, offenbar widerspricht. Hieraus folgt, daß man mit Hülfe eines Parallelogramms, welches hier das Parallelogramm der Kräfte (Parallelogrammum virium) genannt wird, die Bedingungen angeben kann, unter welchen drei auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, weil jedesmal zwei Seiten des Parallelogramms die Größe und Richtung der Seitenkräfte, und diejenige Diagonale, welche mit beiden Seiten einen gemeinschaftlichen Punkt hat, die Größe und Richtung der Gegenkraft für das Gleichgewicht angiebt. Hiernach kann man eben so leicht, wenn die Kräfte durch Linien ausgedrückt werden, aus den beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel, die Größe und Richtung der Gegen- oder Mittelkraft mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte finden, wie man aus den Richtungen der beiden Seitenkräfte und der gegebenen Mittelkraft, die Größe der Seitenkräfte durch eine leichte Zeichnung finden kann.

Auch folgt hieraus, daß sich eine jede Kraft, deren Größe und Richtung gegeben ist, nach unzähligen Richtungen, jedesmal in zwei Seitenkräfte zerlegen läßt, weil man eine unzählige Menge Parallelogramme über einer als Diagonale gegebenen Linie beschreiben kann.

**Anmerkung.** Man pflegt gewöhnlich die Lehre vom Parallelogramm der Kräfte aus der Lehre vom Hebel abzuleiten, wie dies von de la Hire, Kästner, Karsten u. in ihren Lehrbüchern geschehen ist. Die hier gegebene Darstellung ist ein Versuch, diesen Satz ohne Hülfe des Hebels zu beweisen. Zu den vorzüglichsten Bemühungen, den Beweis dieses Satzes unabhängig vom Hebel zu geben, kann man die von Dan. Bernoulli <sup>(1)</sup>, Lambert <sup>(2)</sup>, d'Alembert <sup>(3)</sup>, Foncener <sup>(4)</sup>, de la Place <sup>(5)</sup> und DuRoi <sup>(6)</sup> zählen.

§. 18.

**Aufgabe.** Die Größen dreier Kräfte P, Q, R sind durch die Linien AB, CD, EF, Figur 12. gegeben; man soll die Richtungen dieser Kräfte für das Gleichgewicht durch eine Zeichnung finden. Auf. 1.  
Fig. 12.

**Auflösung.** Aus den drei gegebenen Linien beschreibe man das Dreieck GHI, indem  $GI = AB$ ,

<sup>(1)</sup> Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Acad. Petropol. Tom. I. A. 1724. p. 126.

<sup>(2)</sup> Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. 2. Theil. 2. Abschnitt. Berlin 1770. S. 468.

<sup>(3)</sup> Opusculs Mathemat. T. I. Paris 1761. p. 169. Démonstration du principe de la composition des Forces. Opusc. Math. T. VI. Paris 1773. p. 360. Nouvelle Démonstration du Parallélogramme des Forces.

<sup>(4)</sup> Sur les principes fondamentaux de la Mécanique. Miscellanea Taurinensis Tom. II. (1760—1761.) p. 299.

<sup>(5)</sup> Méchanik des Himmels, übersetzt von Burkhart. Berlin 1800. 1. Theil. S. 2. u.

<sup>(6)</sup> Démonstration du parallélogramme des forces. Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette. Tome I. Paris 1808. No. 4. p. 83.

$IH = CD$  und  $GH = EF$  angenommen wird. Zu dem Dreiecke  $GHI$  ergänze man das Parallelogramm  $GIHK$ , so ist  $GI$  die Richtung der Kraft  $P$ ,  $GK$  der Kraft  $Q$  und  $HG$  der Kraft  $R$  (§. 17.).

So fern aus den drei Seiten  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  kein Dreieck zusammengesetzt werden kann, welches der Fall ist, wenn zwei Seiten kleiner als die dritte sind, so kann auch kein Parallelogramm der Kräfte entstehen, oder es ist unter drei gegebenen Kräften kein Gleichgewicht möglich, wenn zwei davon kleiner sind als die dritte.

## §. 19.

**Aufgabe.** Die Bedingungen anzugeben, unter welchen drei Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  mit Bezug auf ihre Richtungswinkel im Gleichgewichte sind.

Satz. I.

Fig. 2.

**Auflösung.** Man setze Figur 9. den Richtungswinkel der Kräfte  $P$ ,  $R$  oder  $PGR = \alpha$

$$Q, R \text{ oder } QGR = \beta$$

$$P, Q \text{ oder } PGQ = \delta$$

so ist  $\alpha + \beta = \delta$ . Nun verhält sich im Dreiecke  $GPR$

$$GP : GR = \sin GRP : \sin GPR \text{ oder}$$

$$P : R = \sin \beta : \sin (180^\circ - \delta)$$

oder weil

$$\sin (180^\circ - \delta) = \sin \delta \text{ ist, so erhält man}$$

$$R \sin \beta = P \sin \delta. \quad [I]$$

Ferner verhält sich

$$GP : PR = \sin PRG : \sin PGR \text{ oder}$$

$$P : Q = \sin \beta : \sin \alpha \quad \text{daher ist auch}$$

$$P \sin \alpha = Q \sin \beta. \quad [II]$$

Aus dieser und der Gleichung [I] erhält man folgende Ausdrücke

$$(I) \quad P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R \sin \beta}{\sin \delta}$$

$$(II) \quad Q = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R \sin \alpha}{\sin \delta}$$

$$(III) \quad R = \frac{P \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{Q \sin \delta}{\sin \alpha}$$

welche dazu dienen, wenn für das Gleichgewicht drei Kräfte zwei Richtungswinkel und eine Kraft gegeben sind, die übrigen Kräfte durch Rechnung zu finden. Auch sieht man, wie aus einem Richtungswinkel und zwei Kräften die übrigen Richtungswinkel leicht bestimmt werden können.

Weil  $GD = GP \cos \alpha$  und  $RD = PR \cos \beta$ , so ist  $GR = GD + RD = GP \cos \alpha + PR \cos \beta$ , oder man findet die Mittelkraft, wenn die beiden Seitenkräfte nebst ihren Richtungswinkeln gegeben sind

Kaf. I.  
Fig. 9.

$$(IV) \quad R = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

Ferner ist nach [II]  $P \sin \alpha = Q \sin \beta$ . Aber

$\beta = \delta - \alpha$ , also  $\sin \beta = \sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha$  daher

$$P \sin \alpha = Q \sin \delta \cos \alpha - Q \cos \delta \sin \alpha \text{ oder}$$

$$Q \sin \delta = \frac{P \sin \alpha + Q \cos \delta \sin \alpha}{\cos \alpha} = P \operatorname{tgt} \alpha + Q \cos \delta \operatorname{tgt} \alpha$$

folglich findet man die Tangente des Winkels, welchen die Seitenkraft  $P$  mit der Mittelkraft  $R$  einschließt, oder

$$(V) \quad \operatorname{tgt} \alpha = \frac{Q \sin \delta}{P + Q \cos \delta}$$

und es kann daher aus beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel, die Richtung der Mittelkraft gefunden werden.



Aus (V) und (II) erhält man

$$P + Q \cos \delta = \frac{Q \sin \delta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = R \cos \alpha$$

oder quadriert

$$P^2 + 2 P Q \cos \delta + Q^2 \cos^2 \delta = R^2 \cos^2 \alpha; \text{ aber (II) } Q^2 \sin^2 \delta = R^2 \sin^2 \alpha$$

wenn nun beide Gleichungen addirt und  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  sowohl als  $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$  gesetzt werden, so ist

$$P^2 + 2 P Q \cos \delta + Q^2 = R^2$$

und man erhält hieraus die Mittelkraft

$$(VI) R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \delta}$$

so daß aus den beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel die Mittelkraft gefunden werden kann.

Nur ist dabei zu bemerken, daß  $\cos \delta$ , also auch das Produkt  $2 P Q \cos \delta$ , negativ wird, wenn der Winkel  $\delta$  stumpf ist.

Endlich erhält man aus (VI) den Cosinus des Winkels, welchen die Seitenkräfte einschließen, oder

$$(VII) \cos \delta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2 P Q}$$

Es wird kaum nöthig seyn hier zu bemerken, daß wenn man die für das Gleichgewicht erforderliche Gegenkraft sucht, alsdann die gefundene Mittelkraft nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht werden muß.

1. Beispiel. Von zwei Seitenkräften  $P$  und  $Q$  schließt die erste mit der Mittelkraft einen Winkel von 70 Grad 53 Minuten, und die zweite mit eben dieser Mittelkraft einen Winkel von 49 Grad 7 Minuten ein. Die Kraft  $P = 40$  Pfund ist gegeben, man soll  $Q$  finden.

Hier ist nach (II)  $\alpha = 70^\circ 53'$  und  $\beta = 49^\circ 7'$  daher

$$Q = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ 53'}{\sin 49^\circ 7'}$$

oder wenn man mit Logarithmen rechnet

$$\text{Log } 40 = 1,6020600$$

$$\text{Log } \sin 70^\circ 53' = 9,9753648$$

---


$$11,5774248$$

$$\text{Log } \sin 49^\circ 7' = 9,8785470$$

---


$$1,6988776 = \text{Log } 49,9894 = \text{Log } Q$$

Es ist daher die Seitenkraft  $Q = 49,9894$  Pfund.

2. Beispiel. Zwei Kräfte,  $P = 40$  und  $Q = 50$  Pfund wirken unter einem Winkel von  $120$  Grad  $= \delta$  auf einen Punkt; man fragt, wie groß ist die Mittelkraft  $R$ , welche den Kräften  $P$ ,  $Q$  das Gleichgewicht hält?

Weil  $\cos \delta = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5$ , so ist nach (VI) die Mittelkraft

$$R = \sqrt{(1600 + 2500 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 0,5)} = 45,83 \text{ Pfund.}$$

Wollte man auch den Richtungswinkel der Mittelkraft finden, so ist (V)

$$\text{tg } \alpha = \frac{50 \cdot 0,5 \sqrt{3}}{40 - 50 \cdot 0,5} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \text{tg } 70^\circ 53' 36'' = \text{tg } 250^\circ 53' 36''$$

und weil  $\alpha < \delta$  seyn muß, so schließt die Kraft  $R$  mit  $P$  einen Richtungswinkel von  $70$  Grad  $53$  Minuten  $36$  Sekunden ein.

3. Beispiel. Aus den beiden Seitenkräften  $P = 50$  und  $Q = 64$ , nebst der Mittelkraft  $R = 58,26$  Pfund, den Richtungswinkel  $\delta$  der beiden Seitenkräfte zu finden, wird nach (VII)

$$\cos \delta = \frac{58,26^2 - 50^2 - 64^2}{2 \cdot 50 \cdot 64} = -0,5002769$$

$$= -\cos 59^\circ 59' 6'' = \cos 120^\circ 0' 54'', \text{ daher}$$

$$\delta = 120^\circ 0' 54''.$$

## §. 20.

1. Zusatz. Schneiden sich die Richtungen der Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$  unter einem rechten Winkel, so wird nach dem Vorhergehenden  $\delta = 90^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , daher  $\sin \delta = 1$ ;  $\sin \beta = \cos \alpha$  folglich

$$(I) \quad P = Q \cot \alpha = R \cos \alpha$$

$$(II) \quad Q = P \operatorname{tgt} \alpha = R \sin \alpha$$

$$(III) \quad R = P \sec \alpha = Q \operatorname{cosec} \alpha$$

$$(IV) \quad R = P \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

$$(V) \quad \operatorname{tgt} \alpha = \frac{Q}{P}$$

$$(VI) \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

## §. 21.

2. Zusatz. Sind die Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$  einander gleich, also  $P = Q$ , so sind, weil (I) §. 19.  $P \sin \alpha = Q \sin \beta$  ist, also  $\sin \alpha = \sin \beta$ , auch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ , welche die Seitenkräfte mit der Mittelkraft einschließen, gleich groß, und man erhält  $\delta = 2\alpha$ , also  $\sin \delta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  daher

$$(I) \quad P = \frac{R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} R \sec \alpha$$

$$(II) \quad R = \frac{P \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 P \cos \alpha$$

$$(III) \quad \cos \alpha = \frac{R}{2 P}$$

$$(IV) \quad \cos 2\alpha = \frac{R^2 - 2 P^2}{2 P^2}$$

## §. 22.

Wenn die Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  im Gleichgewichte sind, indem die Seitenkräfte  $P$ ,  $Q$  den Richtungswinkel  $\delta$  einschließen, so ist  $P$  mit  $Q$  auch am Richtungs-

Winkel  $180^\circ - \delta$  mit einer Gegenkraft  $S$  im Gleichgewichte, wenn

$$S^2 = 2P^2 + 2Q^2 - R^2 \text{ ist.}$$

**Beweis.** Im Parallelogramme  $ADBG$ , Figur 13., sey  $GA = P$ ,  $GB = Q$ ,  $GD = R$  und der Winkel  $AGB = \delta$ , so ist für  $BA = S$  der Winkel  $GBD = 180^\circ - \delta$  und  $S$  mit  $P = BD$  und  $Q = BG$  im Gleichgewichte. §. 17. Man ziehe  $GE$ ,  $BF$  auf  $AD$  senkrecht, und setze

Kaf. I.  
Fig. 13.

$GE = BF = x$  und  $AE = DF = y$  so ist

$$R^2 = (Q - y)^2 + x^2 \text{ und}$$

$$S^2 = (Q + y)^2 + x^2 \text{ also}$$

$$R^2 + S^2 = (Q - y)^2 + (Q + y)^2 + 2x^2 = 2(Q^2 + x^2 + y^2).$$

Aber  $P^2 = x^2 + y^2$  daher

$$R^2 + S^2 = 2(Q^2 + P^2).$$

§. 23.

Wenn die drei Kräfte  $P, Q, R$ , welche nach den Richtungen  $GP, GQ, GR$ , Figur 14. wirken, im Gleichgewichte sind, und man drei willkürliche Linien  $BC, BA, AC$  dergestalt zieht, daß jede auf einer von den Richtungen der Kräfte  $P, Q, R$  senkrecht steht, so verhalten sich die Seiten des Dreiecks  $ABC$ , welches diese Linien bilden, wie die Kräfte, auf deren Richtungen die Seiten des Dreiecks senkrecht stehen.

Fig. 14.

**Beweis.** Die Richtung  $RG$  werde bis an eine Seite des Dreiecks  $ABC$  verlängert, und zur Diagonale  $GA'$  das Parallelogramm  $GB'A'D'$  beschrieben, so verhält sich §. 17.

$$B'G : A'B' : A'G = P : Q : R$$

Es sind aber die Winkel  
 $RGB' + ACB = RGB' + B'GA' = 180^\circ$  also  $ACB = B'GA'$   
 $RGD' + BAC = RGD' + D'GA' = 180^\circ$  also  $BAC = D'GA'$   
 oder  $BAC = GA'B$ ; da nun in den Dreiecken  $ABC$   
 und  $A'B'G$  die Winkel bei  $C$  und  $A$  den Winkeln  
 bei  $G$  und  $A'$  gleich sind, so sind diese Dreiecke äh-  
 nlich, und es verhält sich

$$B'G : A'B' : A'G = BC : AB : AC \text{ daher auch}$$

$$BC : AB : AC = P : Q : R.$$

## §. 24.

**Aufgabe.** Aus den gegebenen Größen und Rich-  
 tungen mehrerer Kräfte  $P, P', P'', \dots$  welche auf ei-  
 nen Punkt wirken, die Größe und Richtung der Mit-  
 telkraft  $R$  zu finden.

**Auflösung.** Sind die Größen und Richtungen  
 der Kräfte  $P, P', P'', \dots$  durch die Linien  $GP, GP',$   
*Saf. I.*  $GP'', \dots$  Figur 15. ausgedrückt, so ziehe man will-  
*Fig. 15.* kürlich durch  $G$  zwei auf einander winkelrechte Linien  
 $AB, CD$ . Werden nun die Winkel, welche die Kräfte  
 $P, P', P'' \dots$  mit der Linie  $GA$  einschließen, durch  
 $\gamma, \gamma', \gamma'' \dots$  bezeichnet, so daß sämtliche Winkel  
 nach einerlei Seite von  $GA$  gemessen, also von  $0$  bis  
 $360$  Grad fortgezählt werden, so ist der Winkel  
 $AGP = \gamma; AGP' = \gamma'; AGP'' = \gamma'' \dots$  und  
 man kann die Kräfte  $P, P', P'' \dots$  nach Richtungen  
 zerlegen, welche in die Linien  $AB$  und  $CD$  fallen.

Für die Linie  $AB$  erhält man die Seitenträfte  
 von  $P, P', P'' \dots$  (§. 20. I.)

$$G_p = P \cos \gamma; G_{p'} = P' \cos \gamma'; G_{p''} = P'' \cos \gamma''; \dots$$

und eben so für CD (§. 20. II.)

$Gq = P \sin \gamma$ ;  $Gq' = P' \sin \gamma'$ ;  $Gq'' = P'' \sin \gamma''$ ; ....  
wobei mit Bezug auf die Figur sogleich einleuchtet,  
d. h.  $Gp''$ ,  $Gp'''$ ,  $Gq'''$ ,  $Gq''''$ , in Absicht der Richtung  
von den übrigen Seitenkräften, negativ sind, welches  
auch die trigonometrischen Linien  $\cos \gamma''$ ,  $\cos \gamma'''$ ,  
 $\sin \gamma'''$ ,  $\sin \gamma''''$  ausdrücken.

Wird nun die algebraische Summe aller Seiten-  
kräfte nach der Richtung GA durch die Linie Gv,  
und die Summe nach der Richtung GC durch die Li-  
nie Gw ausgedrückt; ferner  $Gv = V$  und  $Gw = W$   
gesetzt, so ist

$$V = P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots$$

$$W = P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots$$

Die aus beiden Kräften V, W entspringende Mit-  
telkraft, welche durch die Linie GR ausgedrückt ist, sen  
R, so ist diese auch mit den Kräften P, P', P'' ....  
im Gleichgewichte, man findet daher (§. 20. VI.) die  
Mittelkraft

$$(I) R = \sqrt{V^2 + W^2} \text{ oder}$$

$$R = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &(P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots)^2 \\ &+ (P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots)^2 \end{aligned} \right\}}$$

Kaf. I.

Fig. 16.

Der Richtungswinkel für die Mittelkraft R  
mit der Linie AG sen  $\Phi$ , so ist (§. 20. V.)

$$(II) \operatorname{tgt} \Phi = \frac{R_v}{G_v} = \frac{W}{V} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tgt} \Phi = \frac{P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots}{P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots}$$

Weil jede Tangente zu zwei verschiedenen Wina-  
keln gehört, welche  $180^\circ$  von einander verschieden sind,

so erhält man zwar durch die Bestimmung von  $\varphi$  die Lage derjenigen Linie, in welche die Richtung der Kraft  $R$  fällt, es bleibt aber ungewiß, ob  $R$  oberhalb  $AB$  nach  $GR$  oder unterhalb  $AB$  nach  $Gr$  angebracht werden muß. Dies läßt sich mit Hülfe von  $\sin \varphi$  beurtheilen, weil ein positiver Werth von  $\sin \varphi$  anzeigt, daß  $R$  oberhalb  $AB$ , und ein negativer, daß  $R$  unterhalb angebracht werden muß. Nun ist  $\sin \varphi = \frac{R_v}{RG}$  daher

$$(III) \sin \varphi = \frac{W}{R} \text{ oder}$$

$$\sin \varphi = \frac{P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots}{R}$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß diese Aufgaben, auch ohne Rechnung, durch bloße Zeichnung aufgelöst werden können.

**Beispiel.** Vier Kräfte  $P = 100$ ,  $P' = 80$ ,  $P'' = 60$ ,  $P''' = 200$  Pfund wirken an einem Punkte, und bilden mit einer willkürlichen Linie  $GA$  die Richtungswinkel  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\gamma' = 150^\circ$ ,  $\gamma'' = 225^\circ$  und  $\gamma''' = 300^\circ$ ; man sucht die Größe der Mittelkraft  $R$ , welche den gegebenen vier Kräften das Gleichgewicht hält.

Es ist:

$$\sin \gamma = \sin 60^\circ = 0,866025 \dots \therefore \text{also } P \sin \gamma = + 86,6025$$

$$\sin \gamma' = \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0,5 \dots \text{also } P' \sin \gamma' = + 40,0000$$

$$\sin \gamma'' = \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = -0,707107 \text{ also } P'' \sin \gamma'' = - 42,4264$$

$$\sin \gamma''' = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -0,866025 \text{ also } P''' \sin \gamma''' = -173,2050$$

$$W = P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + P''' \sin \gamma''' = - 89,0289$$

Ferner:

$$\cos \gamma = \cos 60^\circ = 0,5 \dots \therefore \text{also } P \cos \gamma = + 50,0000$$

$$\cos \gamma' = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -0,866025 \text{ also } P' \cos \gamma' = - 69,2820$$

$$\cos \gamma'' = \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -0,707107 \text{ also } P'' \cos \gamma'' = - 42,4264$$

$$\cos \gamma''' = \cos 300^\circ = \cos 60^\circ = 0,5 \dots \text{also } P''' \cos \gamma''' = + 100,0000$$

$$V = P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' = + 38,2916$$

Hieraus findet man die Mittelfraft

$$R = \sqrt{(V^2 + WV^2)} = \sqrt{9392,46} = 96,915 \text{ Pfund.}$$

Für die Richtung der Mittelfraft ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-89,0289}{+38,2916} = -2,325029 = -\operatorname{tg} 66^\circ 44' = \operatorname{tg} 113^\circ 16'$$

Die Richtung der Mittelfraft  $R$  schließt daher mit  $GA$  einen Winkel von  $113$  Grad  $16$  Minuten, oder von  $293^\circ 16'$  ein, so daß im ersten Falle die Kraft  $R$  oberhalb, und im zweiten unterhalb  $AB$  fällt. Nun war  $W$  negativ, also ist  $\sin \varphi$  negativ, folglich  $\varphi$  größer als  $180^\circ$ , daher ist der gesuchte Winkel

$$\varphi = 293^\circ 16' = -66^\circ 44'.$$

### §. 25.

Zusatz. Fällt die Linie  $AG$  Figur 15. in die Richtung der Kraft  $P$ , so wird  $\gamma = 0$ , also  $\sin \gamma = 0$  und  $\cos \gamma = 1$ , daher die Mittelfraft

$$R = \sqrt{[(P \sin \gamma' + P' \sin \gamma'' + \dots)^2 + (P + P' \cos \gamma' + P' \cos \gamma'' + \dots)^2]}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + P''' \sin \gamma''' + \dots}{P + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \dots}$$

### §. 26.

Sind am Punkte  $G$  Figur 15. mehrere Kräfte  $P, P', P'', P''', P''''$  im Gleichgewichte, so ist die Mittelfraft  $R = 0$ , also keine Gegenkraft erforderlich das Gleichgewicht zu halten; es ist daher (§. 24.) für diesen Fall  $V = 0$  und  $W = 0$ , d. h. mehrere Kräfte  $P, P', P'', P''', P'''' \dots$  welche an einem Punkte wirken, und mit einer willkürlichen Linie die Winkel  $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma'''' \dots$  bilden, sind im Gleichgewichte, wenn

$$P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + P''' \sin \gamma''' + P'''' \sin \gamma'''' \dots = 0$$

und



$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \dots = 0$   
 ist, welches die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht mehrerer Kräfte an einem Punkte sind.

## §. 27.

Zieht man von einem willkürlich angenommenen Punkte winkelrechte Linien auf die Richtungen verschiedener Kräfte, so erhält man dadurch die Abstände der Richtungen von diesem Punkte. Werden alsdann diese Abstände mit den zugehörigen Kräften multipliziert, so nennt man diese Produkte die Momente der Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt O, und dieser heißt der Mittelpunkt der Momente.

Zaf. I.

Fig. 16.

Wären die Kräfte  $P, P', P''$  Figur 16. nach verschiedenen Richtungen  $GP, GP', GP''$  angebracht, welche sich im Punkt  $G$  schneiden; und man nimmt in einer dieser Richtungen den willkürlichen Punkt  $O$  an, von welchem winkelrechte Linien  $OD, OE$  auf die nöthigenfalls verlängerten Richtungen der Kräfte  $P, P'$  gezogen werden, so muß das Moment  $OD \cdot P$  dem Momente  $OE \cdot P''$  gleich seyn, wenn die Kräfte  $P, P', P''$  unter einander im Gleichgewichte sind.

Denk man setze den Winkel  $OGD = \alpha, OGE = \beta$ , so ist (§. 19. I.)

$$P \sin \alpha = P'' \sin \beta$$

aber es ist auch

$$\sin \alpha = \frac{OD}{OG} \text{ und } \sin \beta = \frac{OE}{OG} \text{ daher}$$

$$P \cdot \frac{OD}{OG} = P'' \cdot \frac{OE}{OG} \text{ oder}$$

$$OD \cdot P = OE \cdot P''$$

d. h. wenn zwischen drei nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften ein Gleichgewicht vorhanden ist, so müssen die Momente gleich seyn, welche entstehen, wenn aus einem willkürlichen Punkte in der Richtung einer dieser Kräfte die Abstände genommen werden.

Wären die Momente nicht vom Punkte  $O$  sondern von  $O'$  gerechnet, so bleibt der Beweis für die Dreiecke  $G O' D'$  und  $G O' E'$  mit dem vorigen einerlei; auch läßt sich einsehen, wie man aus der Gleichheit der Momente auf das Gleichgewicht der Kräfte schließen kann, weil sich der Beweis eben so leicht führen läßt.

§. 28.

Die Sätze von den Momenten lassen sich in der größten Allgemeinheit auf jede Anzahl von Kräften  $P, P', P'', P''' \dots$  anwenden, welche an einem gemeinschaftlichen Punkte  $G$  Figur 17. wirken, wobei es auch nicht nöthig ist, den Mittelpunkt  $O$  der Momente in einer der Richtungen der Kräfte anzunehmen, da er jede andere Lage erhalten kann.

Taf. I.  
Fig. 17.

Gesetzt die Kräfte  $P, P', P'', P'''$  wären im Gleichgewichte, wenn ihre Richtungen mit irgend einer Linie  $GA$  die Winkel  $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$  einschließen, also  $\angle AGP = \gamma; \angle AGP' = \gamma'$  u. s. w. ist. Ferner sey  $O$  ein willkürlich angenommener Punkt, dessen Lage gegen die Linie  $GA$  durch den Winkel  $\angle OGA = \omega$  und durch die Linie  $OG = x$  bestimmt werde. Vom Punkte  $O$  sey  $OD$  winkelrecht auf die Richtung der Kraft  $P'$

gezogen, und man nenne diesen Abstand  $= a$ ; eben so sollen  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  die Abstände der Richtungen der Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  vom Punkte  $O$  bezeichnen, als dann ist

$$a = x \sin (\gamma - \omega); \quad a' = x \sin (\gamma' - \omega);$$

$$a'' = x \sin (\gamma'' - \omega); \quad a''' = x \sin (\gamma''' - \omega).$$

Nach §. 26. ist für das Gleichgewicht unter den gegebenen Kräften

$$(I) \quad P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + P''' \sin \gamma''' = 0$$

und

$$(II) \quad P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' = 0$$

Wird die erste Gleichung mit  $x \cos \omega$ , und die zweite mit  $x \sin \omega$  multipliziert, und von erster die letzte abgezogen, so erhält man

$$Px (\sin \gamma \cos \omega - \cos \gamma \sin \omega) + P'x (\sin \gamma' \cos \omega - \cos \gamma' \sin \omega) + \dots = 0$$

oder nach bekannten trigonometrischen Lehren,

$$Px \sin (\gamma - \omega) + P'x \sin (\gamma' - \omega) + P''x \sin (\gamma'' - \omega) + \dots = 0$$

und wenn die oben gefundenen Werthe für  $x \sin (\gamma - \omega) \dots$  in diese Gleichung gesetzt werden

$$(III) \quad aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' = 0.$$

d. h. im Falle des Gleichgewichts muß für jeden willkürlich angenommenen Punkt  $O$ , die Summe der Momente sämtlicher Kräfte  $= 0$  seyn.

Bei näherer Untersuchung des erhaltenen allgemeinen Ausdrucks für die Summe der Momente läßt sich leicht einsehen, daß mehrere derselben negativ werden müssen, in sofern die Werthe von  $a$ ,  $a' \dots$  oder  $\sin (\gamma - \omega)$ ;  $\sin (\gamma' - \omega) \dots$  negativ sind. Dies wird aber allemal der Fall seyn, wenn die Winkel

$(\gamma - \omega)$ ;  $(\gamma' - \omega)$  . . . . größer als zwei rechte werden, weil alsdann der Sinus negativ ist, oder wenn die Abstände (OD) unterhalb der Linie OG fallen.

Wären sämtliche Kräfte mit ihren Abständen weniger einem gegeben, so kann man den fehlenden Abstand nach (III) für das Gleichgewicht leicht finden, so wie auch wenn sämtliche Abstände und die zugehörigen Kräfte weniger einer gegeben sind, die fehlende Kraft für das Gleichgewicht aus der Gleichung (III) gefunden werden kann.

§. 29.

**Aufgabe.** In einer festen, gewichtslosen Ebene MN Figur 18. sind zwei Kräfte P, P' nach beliebigen Richtungen AP, A'P' angebracht, welche eine willkürlich gezogene Linie OZ in A und A' schneiden. Die Größe dieser Kräfte ist gegeben, und ihre Lage werde durch die Winkel  $\angle OAP = \alpha$ ,  $\angle OA'P' = \alpha'$  und durch die Entfernungen  $OA = b$ ,  $OA' = b'$  bestimmt; man soll die Größe und Lage einer dritten Kraft R finden, welche mit den Kräften P, P' im Gleichgewichte ist.

Taf. I.  
Fig. 18.

**Auflösung.** Schneiden sich die Richtungen der Kräfte P, P' im Punkte G, so ist ihre Wirkung eben dieselbe als wenn solche unmittelbar im Punkte G nach ihren Richtungen angebracht wären (§. 4.). Man kann daher nach §. 19. die Größe und Lage einer dritten Kraft R finden, deren Richtung durch G geht und welche mit P und P' im Gleichgewichte ist. Die Richtung dieser Kraft R sey GR, und schneide verlängert

die Linie  $OZ$  in  $B$ ; die gesuchte Entfernung  $OB$  (s.)  $= r$ , und damit alle Winkel auf einerlei Art von der Linie  $OZ$  ab gemessen werden, so sey der erhabene Winkel  $OB R = \Phi$ . Man ziehe  $O'Z'$  durch  $G$  mit  $OZ$  parallel, so sind die Winkel  $O'GP = \alpha$ ,  $O'GP' = \alpha'$ ,  $O'GR = \Phi$ , daher §. 26.

$$(I) P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + R \sin \Phi = 0 \text{ und}$$

$$(II) P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + R \cos \Phi = 0.$$

Nun muß ferner in dem Sinne §. 28. (III) für jeden willkürlich angenommenen Punkt  $O$ , die Summe von den Momenten der Kräfte  $= 0$  seyn; werden daher die Linien  $OD$ ,  $OD'$ ,  $OE$  auf die Richtungen der Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $R$  winkelmäßig gezogen, so erhält man

$$OD \cdot P + OD' \cdot P' + OE \cdot R = 0.$$

Aber  $OD = AO \cdot \sin \alpha = b \sin \alpha$ ;  $OD' = b' \sin \alpha'$  und  $OE = r \sin \Phi$ , daher

$$(III) b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha' + r R \sin \Phi = 0.$$

Aus (I) und (II) findet man

$$(P \sin \alpha + P' \sin \alpha')^2 = R^2 \sin^2 \Phi$$

$$(P \cos \alpha + P' \cos \alpha')^2 = R^2 \cos^2 \Phi$$

und wenn man beide Ausdrücke addirt und

$\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$  setzt, so ist die gesuchte Kraft

$$R = \sqrt{[P \sin \alpha + P' \sin \alpha']^2 + [P \cos \alpha + P' \cos \alpha']^2}$$

oder weil  $\sin \alpha \sin \alpha' + \cos \alpha \cos \alpha' = \cos (\alpha - \alpha')$  ist

$$(IV) R = \sqrt{P^2 + P'^2 + 2 P P'}.$$

Aus (I) und (II) erhält man ferner

$$P \sin \alpha + P' \sin \alpha' = - R \sin \Phi$$

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' = - R \cos \Phi$$

wird mit dem letzten Ausdrucke in den vorstehenden

dividirt und  $\operatorname{tgt} \Phi$  statt  $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  gesetzt, so findet man die Lage der Richtung für die Kraft R oder

$$(V) \operatorname{tgt} \Phi = \frac{P \sin \alpha + P' \sin \alpha'}{P \cos \alpha + P' \cos \alpha'}$$

Endlich ist nach (I) und (III)

$$P \sin \alpha + P' \sin \alpha' = - R \sin \Phi$$

$$b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha' = - r R \sin \Phi$$

und wenn der letzte Ausdruck durch den vorstehenden dividirt wird, so erhält man den Abstand

$$(VI) r = \frac{b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha'}{P \sin \alpha + P' \sin \alpha'}$$

§. 30.

**Zusatz.** Will man keinen erhabenen Winkel in Rechnung bringen, so darf man nur von jedem, welcher diese Beschaffenheit hat, 180 Grad abziehen, alsdann kommt nach dem Beispiel Figur 18. statt des erhabenen Winkels  $\angle BR = \Phi$ , der Winkel  $\angle BE = \Phi - 180^\circ$  in Rechnung. Setzt man diesen  $= \psi$ , so ist

Kaf. I.  
Fig. 18.

$$\sin \psi = \sin (\Phi - 180^\circ) = - \sin \Phi \text{ und}$$

$$\cos \psi = \cos (\Phi - 180^\circ) = - \cos \Phi, \text{ also}$$

$\sin \Phi = - \sin \psi$  und  $\cos \Phi = - \cos \psi$ . Diese Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen gesetzt, geben

$$(I) R \sin \psi = P \sin \alpha + P' \sin \alpha'$$

$$(II) R \cos \psi = P \cos \alpha + P' \cos \alpha'$$

$$(III) r R \sin \psi = b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha'$$

Die Ausdrücke für R,  $\operatorname{tgt} \psi$  und r bleiben wie bei (IV), (V) und (VI).

Eben diese Resultate werden erhalten, wenn man nicht diejenige Lage der Kraft R sucht, in welcher sie

die Linie  $OZ$  in  $B$ ; die gesuchte Entfernung  $OB = r$ , und damit alle Winkel auf einerlei Art von der Linie  $OZ$  ab gemessen werden, so sey der erhabene Winkel  $OBR = \Phi$ . Man ziehe  $O'Z'$  durch  $G$  mit  $OZ$  parallel, so sind die Winkel  $O'GP = \alpha$ ,  $O'GP = O'GR = \Phi$ , daher §. 26.

$$(I) P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + R \sin \Phi = 0$$

$$(II) P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + R \cos \Phi = 0$$

Nun muß ferner in dem Sinne §. 28. (III) jeden willkürlich angenommenen Punkt  $O$ , die Summe von den Momenten der Kräfte  $= 0$  seyn; werden her die Linien  $OD$ ,  $OD'$ ,  $OE$  auf die Richtungen Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $R$  senkrecht gezogen, so erhält man

$$OD \cdot P + OD' \cdot P' + OE \cdot R = 0.$$

Aber  $OD = AO \cdot \sin \alpha = b \sin \alpha$ ;  $OD' = b' \sin \alpha'$ ;  $OE = r \sin \Phi$ , daher

$$(III) bP \sin \alpha + b'P' \sin \alpha' + rR \sin \Phi = 0$$

Aus (I) und (II) findet man

$$(P \sin \alpha + P' \sin \alpha')^2 = R^2 \sin^2 \Phi$$

$$(P \cos \alpha + P' \cos \alpha')^2 = R^2 \cos^2 \Phi$$

und wenn man beide Ausdrücke addirt und  $\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$  setzt, so ist die gesuchte

$$R =$$

oder

$$(IV)$$

Aus

wird

widert und  $\operatorname{tg} \varphi$  statt  $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  gesetzt, so findet man  
 die Lage der Richtung für die Kraft R oder

$$(V) \operatorname{tg} \varphi = \frac{P \sin \alpha + P' \sin \alpha'}{P \cos \alpha + P' \cos \alpha'}$$

Wollte man nach (I) und (III)

$$P \sin \alpha + P' \sin \alpha' = -R \sin \varphi$$

$$bP \sin \alpha + b'P' \sin \alpha' = -rR \sin \varphi$$

wenn der letzte Ausdruck durch den vorstehenden  
 geteilt wird, so erhält man den Abstand

$$(D) r = \frac{bP \sin \alpha + b'P' \sin \alpha'}{P \sin \alpha + P' \sin \alpha'}$$

§. 30.

Zusatz. Will man keinen erhabenen Winkel in  
 die Rechnung bringen, so darf man nur von jedem, welcher  
 diese Beschaffenheit hat, 180 Grad abziehen, als

beim Beispiel Figur 18. statt des Winkels  $\angle OR = \varphi$ , der Winkel  $\angle OBE$   
 von 180° in Rechnung. Setzt man diesen  $= \psi$ ,  
 dann ist  $\psi = \varphi - 180^\circ$

Nach I.  
 Fig. 18.

$$\sin (\varphi - 180^\circ) = -\sin \varphi \text{ und}$$

$$\cos (\varphi - 180^\circ) = -\cos \varphi$$



mit  $P$  und  $P'$  das Gleichgewicht hält, sondern diejenige in welcher sie eben die Wirkung nach derselben Richtung wie  $P$ ,  $P'$  hervorbringt.

## §. 31.

Kap. I.  
Fig. 19.

Die Ebene  $YZ$  Fig. 19. werde von der Richtung  $MG$  einer Kraft  $V$ , welche außerhalb dieser Ebene liegt, in  $G$  geschnitten; man ziehe  $MN$  winkelrecht auf  $YZ$ , so ist  $MGN = \alpha$  der Einfallswinkel, unter welchem die Richtung der Kraft  $V$  die Ebene  $YZ$  schneidet. Der Punkt  $G$  leidet daher nach der verlängerten Richtung  $GL$  einen Druck  $V$ . Wird  $NG$  bis  $H$  verlängert, und in der auf  $YZ$  winkelrechten Ebene  $GHL$  das Parallelogramm  $GHLK$  gezeichnet, so ist, für  $GL = V$ , weil der Winkel  $LGH = \alpha$  ist, (§. 20.),

$GH = V \cos \alpha$  und  $GK = V \sin \alpha$   
oder wenn  $YZ$  eine feste Ebene ist und

$P$  den von  $V$  herrührenden Druck bezeichnet, welcher in die Ebene  $YZ$  fällt, und solche nach derjenigen Richtung fort zu treiben strebt, welche in der Ebene des Einfallswinkels  $\alpha$  liegt, und

$Q$  den Druck bezeichnet, der im Punkte  $G$  winkelrecht auf die Ebene  $YZ$  entsteht, so ist

$$(I) P = V \cos \alpha$$

$$(II) Q = V \sin \alpha$$

Man pflegt den Punkt  $N$ , die Projection des Punktes  $M$ , und die Linie  $NG$  die Projection der Linie  $MG$  auf die Ebene  $YZ$  zu nennen. Auch heißt  $Q$  der Normaldruck gegen die Ebene  $YZ$ .

§. 32.

**Aufgabe.** Auf den Punkt G, Figur 20., wirken drei Kräfte P, P', P'' deren Richtungen GA, GB, GC wechselseitig auf einander winkelrecht sind, man soll die Größe und Richtung der Mittelfraft V finden.

Kaf. I.  
Fig. 20.

**Auflösung.** Es sey  $GA = P, GB = P', GC = P''$ ; man ergänze zu diesen drei gegebenen Seiten das Parallelopipedon AGBCDH und ziehe die Diagonale DG, so ist GD die Größe und Richtung der Mittelfraft V.

Denn in der Grundfläche AB ist die Diagonale GH die Mittelfraft von P und P', so wie im Rechteck GHDC, die Diagonale DG, die Mittelfraft zwischen GH und GC oder zwischen P, P' und P'' ist, folglich muß  $V = DG$  seyn.

Weil im Rechtecke AGBH

$$GH^2 = AG^2 + GB^2$$

und im Rechtecke GCDH

$$DG^2 = GH^2 + GC^2, \text{ so ist}$$

$$DG^2 = AG^2 + GB^2 + GC^2.$$

oder man findet die Mittelfraft

$$V = \sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2}.$$

Umgekehrt läßt sich jede Kraft V in drei auf einander winkelrechte Richtungen zerlegen, welche ganz willkürlich angenommen werden können, daher läßt sich auch jede Anzahl von Kräften, welche auf einen Punkt wirken, nach drei auf einander winkelrechten Richtungen zerlegen.

Man setze den Winkel  $DGH = \alpha$ , und  $AGH = \beta$ , so wird

$$GH = GD \cdot \cos \alpha = V \cos \alpha;$$

$$AG = GH \cdot \cos \beta; \quad GB = GH \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad DH = GD \sin \alpha.$$

Hierin die entsprechenden Werthe gesetzt, so  
 Set man

$$P = V \cos \alpha \cos \beta$$

$$P' = V \cos \alpha \sin \beta$$

$$P'' = V \sin \alpha$$

$$P^2 + P'^2 = V^2 \cos^2 \alpha.$$

Anmerkung. So wie man mittelst des Parallelogramms der Kräfte zwischen zwei gegebenen Kräften eine dritte findet, welche denselben das Gleichgewicht hält, so geschieht dies hier für drei Kräfte, deren Richtungen nicht in einerlei Ebene fallen durch das Parallelepiped der Kräfte.

### §. 33.

Saf. I.

Fig. 21.

**Aufgabe.** Auf den Punkt G, Figur 21., wirken mehrere Kräfte  $V, V', V'' \dots$  nach Richtungen, welche nicht in einerlei Ebene fallen; man soll die Größe und Richtung der Mittelkraft U für das Gleichgewicht finden.

**Auflösung.** Durch den Punkt G lege man willkürlich eine Ebene YZ, und bestimme von den Kräften  $V, V', V'' \dots$  die Einfallswinkel  $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$  gegen die Ebene YZ sowohl als die Winkel  $\gamma, \gamma', \gamma'' \dots$  welche die Projectionen von den Richtungen der Kräfte, mit einer Linie GA bilden, die willkürlich in der Ebene YZ gezogen ist. Nun zerlege man jede der Kräfte  $V, V', V'' \dots$  in zwei Seitenkräfte (§. 20.) wovon

die erstern  $P, P', P'' \dots$  in die Ebene  $YZ$  fallen, die andern  $Q, Q', Q'' \dots$  aber, nach der Richtung  $Gs$  auf der Ebene  $YZ$  winkelrecht sind, so ist

$$P = V \cos \alpha; \quad P' = V' \cos \alpha'; \quad \dots$$

$$Q = V \sin \alpha; \quad Q' = V' \sin \alpha'; \quad \dots,$$

Aus der Größe und Richtung sämtlicher Kräfte  $P, P', P'' \dots$  welche in die Fläche  $YZ$  fallen, läßt sich eine Mittelfraft  $R$  und der Richtungswinkel finden, welchen die Richtung der Kraft  $R$  mit der Linie  $AG$  einschließt. Es sey dieser Winkel  $AGr = \varphi$ , so ist

(§. 24. I.)

$$(I) \quad R = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &(P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots)^2 \\ &+ (P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots)^2 \end{aligned} \right\}} \text{ und}$$

$$(II) \quad \operatorname{tgt} \varphi = \frac{P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots}{P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots}.$$

Ist nun  $S$  die Summe aller Kräfte  $Q, Q', Q'' \dots$  welche auf die Ebene  $YZ$  winkelrecht nach der Richtung  $Gs$  wirken, so ist

$$(III) \quad S = V \sin \alpha + V' \sin \alpha' + V'' \sin \alpha'' + \dots$$

Man setze  $Gr = R$  und  $Gs = S$ , zeichne das Parallelogramm  $Gsur$ , so ist  $Gu = U$  die Mittelfraft welche  $R$  und  $S$ , also auch  $P, P', P'' \dots$  und  $Q, Q', Q'' \dots$  oder den Kräften  $V, V', V'' \dots$  das Gleichgewicht hält. Nun ist

$$Gu^2 = Gr^2 + Gs^2, \text{ daher}$$

$$(IV) \quad U = \sqrt{R^2 + S^2}$$

und wenn der Richtungswinkel  $rGu = \omega$  gesetzt wird

$$ur = rG \operatorname{tgt} \omega \text{ oder}$$

$$(V) \quad \operatorname{tgt} \omega = \frac{S}{R}.$$

Es läßt sich daher jedesmal wenn die Größe und

Lage der Richtungen mehrerer in einem Punkte wirkender Kräfte  $V, V', V'' \dots$  gegen eine Ebene gegeben ist, daraus die Größe der Mittelkraft  $U$  und die Lage ihrer Richtung mittelst der Winkel  $\varphi$  und  $\omega$  finden.

Eben so kann man jede Anzahl von Kräften welche auf einen Punkt wirken, in zwei andere Kräfte  $R$  und  $S$  zerlegen, welche auf einander senkrecht sind.

#### §. 34.

**Zusatz.** Sind sämtliche Kräfte  $V, V', V'' \dots$  welche auf einen Punkt wirken, und deren Richtungen nicht in einerlei Ebene fallen, mit einander im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft  $U = 0$ , daher  $R = 0$  und  $S = 0$ , und man erhält für die Bedingungen unter welchen die Kräfte  $V, V', V'' \dots$  einander das Gleichgewicht halten

$$P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots = 0$$

$$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots = 0$$

$$V \sin \alpha + V' \sin \alpha' + V'' \sin \alpha'' + \dots = 0$$

wo bekanntlich  $P = V \cos \alpha; P' = V' \cos \alpha' \dots$  ist.

#### §. 35.

**Zus. 1.** **Fig. 22.** Drei Kräfte  $P, Q, R$ , Figur 22., wirken nach verschiedenen Richtungen  $GP, GQ, GR$  auf den Punkt  $G$  und erhalten einander im Gleichgewichte. Erhält der Punkt  $G$  durch irgend eine Ursache eine grade fortgehende Bewegung, etwa von  $G$  nach  $G'$ , und die Kräfte  $P, Q, R$  wirken fortwährend nach Richtungen  $G'P', G'Q', G'R'$  welche den ersten Richtungen derselben parallel sind, so ist jede Kraft um einen Theil,

nach paralleler Richtung gemessen, fort gerückt. Zieht man  $G'B$  auf die ursprüngliche Richtung  $GQ$  winkelrecht, so ist die Kraft  $Q$  um den Weg  $GB$  in paralleler Richtung weiter gerückt, und man kann  $GB$  den Weg der Kraft  $Q$  nach paralleler Richtung nennen. Eben so sind wenn  $G'A$  und  $G'D$  auf den Richtungen  $GP$  und  $GR$  winkelrecht sind,  $GA$  und  $GD$  die Wege, welche die Kräfte  $P$  und  $R$  nach parallelen Richtungen zurück gelegt haben. Nun läßt sich beweisen, daß bei einer jeden grade fortgehenden Bewegung des Punktes  $G$ , die Summe von den Producten einer jeden Kraft in ihren nach paralleler Richtung zurück gelegten Weg  $= 0$  ist, vorausgesetzt daß man die Wege ( $GA$ ,  $GB$ ) welche nach der Richtung der Kräfte zurück gelegt sind, positiv, und die Wege ( $GD$ ) welche gegen diese Richtungen gehen, negativ in Rechnung bringt.

Denn man setze die Winkel  $PGD = \alpha$ ,  $DGQ = \beta$ ,  $DGG' = \varphi$ ; die Wege  $GA = p$ ,  $GB = q$ ,  $GD = r$ ,  $GG' = x$ ;

so erhält man in den rechtwinklichten Dreiecken  $GG'A$ ,  $GG'B$ ,  $GG'D$

$$\frac{p}{x} = \cos(\alpha + \varphi); \quad \frac{q}{x} = \cos(\beta - \varphi); \quad \frac{r}{x} = \cos \varphi.$$

Nun ist

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha \text{ oder}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{r}{x} \cos \alpha - \frac{x}{x} \sin \varphi \sin \alpha \text{ [I].}$$

Serner ist

$$\cos(\beta - \varphi) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta \text{ oder}$$

$$\frac{q}{x} = \frac{r}{x} \cos \beta + \frac{x}{x} \sin \varphi \sin \beta, \text{ [II].}$$

Die Gleichung [I] werde mit  $x \sin \beta$  und [II] mit  $x \sin \alpha$  multipliziert, so ist

$$p \sin \beta = r \cos \alpha \sin \beta - x \sin \varphi \sin \alpha \sin \beta \text{ und}$$

$$q \sin \alpha = r \sin \alpha \cos \beta + x \sin \varphi \sin \alpha \sin \beta.$$

Beide Gleichungen addirt, geben

$$p \sin \beta + q \sin \alpha = r (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ = r \sin (\alpha + \beta) \text{ oder}$$

$$p \sin \beta + q \sin \alpha - r \sin (\alpha + \beta) = 0.$$

Nach §. 19. ist

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{R \sin \beta}{P} \text{ und } \sin \alpha = \frac{Q \sin \beta}{P}.$$

Setzt man diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung, und multipliziert durchgängig mit  $\frac{P}{\sin \beta}$ , so wird

$$p \cdot P + q \cdot Q - r \cdot R = 0.$$

Da nun  $P, Q, R$  so angesehen werden können, als wenn sie aus jeder noch so großen Anzahl von Kräften zusammen gesetzt sind (§. 33.) so folgt hieraus die Allgemeinheit des Satzes für jede Anzahl von Kräften.

### §. 36.

1. Zusatz. Für den Fall daß  $\varphi = 90^\circ$  wird, ist  $\cos \varphi = 0$ , also  $r = 0$ , daher

$$q \cdot Q = p \cdot P$$

weil  $\cos (\alpha + 90^\circ)$  also auch  $p$  negativ ist. Nennt man nun  $P$  die Kraft und  $Q$  die Last, so ist  $p$  der Weg der Kraft und  $q$  der Weg der Last, und es verhält sich

$$P : Q = q : p$$

oder für das Gleichgewicht zwischen  $P$  und  $Q$ , wenn eine gradlinigte Bewegung winkelrecht auf die Rich-

tung der dritten Kraft  $R$  entsteht, verhält sich die Kraft  $P$  zur Last  $Q$ , umgekehrt wie die Wege welche sie nach parallelen Richtungen ihrer Wirkungen durchlaufen.

§. 37.

2. Zusatz. Statt daß die Kraft  $R$  in  $G$  nach der Richtung  $GR$  wirkt, könnten, wenn der Punkt  $r$  mit  $G$  in einer festen Verbindung steht, in  $r$  mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen angebracht werden, welche dasselbe auf den Punkt  $G$  wirken, was  $R$  verrichtet, und man könnte  $R$  weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören. Für die Wege der Kräfte in  $r$  wird alsdann noch eben so der erwiesene Satz gelten, und weil man in den übrigen Richtungen der Kräfte noch mehrere solche Punkte wie  $r$  annehmen kann, so folgt ganz allgemein für jede Anzahl von Kräften, sie mögen auf einen oder mehrere Punkte einer festen Masse oder eines aus festen Linien verbundenen Systems wirken, daß, für das Gleichgewicht unter sämtlichen Kräften, die algebraische Summe von den Producten einer jeden Kraft in ihren nach paralleler Richtung zurück gelegten Weg  $= 0$  seyn muß.

Taf. I.  
Fig. 22.

Anmerkung. Dieser Satz ist von der größten Wichtigkeit, und kann als allgemeines Grundgesetz der Statik angesehen werden; auch ist derselbe unter dem Namen des Cartesischen Grundsatzes bekannt. Hier ist er nur für die grade fortgehende Bewegung bewiesen, er läßt sich aber eben so für die drehende Bewegung erweisen (§. 69.) so daß er in beiden Fällen ganz allgemein gilt, und da-



her die wichtigsten Lehren der Statik enthält. Es ist nicht nothwendig, ihn, wie gewöhnlich, für jeden besondern Fall bei den einzelnen statistischen Maschinen darzu-  
thun, weil er hier ein für allemal für alle diejenigen Fälle erwiesen ist, welche sich auf das Parallelogramm der Kräfte gründen.

---

## Z w e i t e s   K a p i t e l.

Vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte welche  
nicht auf einen einzigen Punkt wirken,  
oder vom Hebel und der Drehungsaxe.

---

### §. 38.

Jede feste und unbiegsame Linie heißt ein Hebel. (*Vectis. Levier*). Wird derselbe ohne Gewicht vorausgesetzt, so wird er zur Unterscheidung vom physischen, ein mathematischer Hebel genannt.

Derjenige Punkt in welchem der Hebel so befestigt ist, daß er sich frei umdrehen kann, heißt der Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt. (*Hypomochlion. Point d'appui*).

Unter Angriffs- oder Aufhängepunkte versteht man diejenigen Punkte am Hebel, auf welche die einzelnen Kräfte wirken.

Sind nur zwei Kräfte an einem graden Hebel angebracht, so pflegt man, wenn sich der Drehpunkt

am Ende des Hebels befindet, denselben einen einarmigten (Vect. homodromus) zu nennen. Liegt aber der Stützpunkt zwischen beiden Endpunkten des graden Hebels, so heißt derselbe doppelarmig. (V. heterodromus). Bilden endlich die beiden graden Hebelsarme einen Winkel, dessen Spitze in den Drehpunkt fällt, so wird ein solcher Hebel ein Winkelhebel (V. angularis) genannt, um ihn von dem graden oder gebogenen Hebel zu unterscheiden.

Bei den folgenden Untersuchungen wird allemal ein gewichtloser Hebel vorausgesetzt, und dabei angenommen, daß sich die Richtungen sämtlicher Kräfte in einerlei Ebene befinden, es sey denn daß eine besondere Erinnerung beigelegt wäre.

§. 39.

Am wagerechten doppelarmigen Hebel  $AB$ , Figur 23. welcher in  $C$  seinen Drehungspunkt hat, sind die Gewichte  $P, Q$  aufgehängt. Verhalten sich alsdann diese Gewichte umgekehrt wie die Länge der Hebelsarme, an welchen sie angebracht sind, so ist der Hebel im Gleichgewichte.

Taf. I.  
Fig. 23.

**Beweis.** Ueber  $AB$  beschreibe man den Halbkreis  $ADB$ , ziehe  $CD$  auf  $AB$  winkelrecht und durch  $D, A$  und  $D, B$  die Linien  $DG$  und  $DL$ . Man nehme auf den Richtungen der Kräfte in dem Sinn, §. 12.,  $AE = P$  und  $BF = Q$ , und beschreibe die Parallelogramme  $EH$  und  $FK$ , so sind die Dreiecke  $AEG$ ,  $ACD$ ,  $BCD$  und  $BFI$  einander ähnlich.

Nun verhält sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$P : Q \text{ oder } AE : BF = BC : AC$$

und wegen Ähnlichkeit der angeführten Dreiecke, weil  $AH = EG$  und  $BK = FI$  ist,

$$AH : AE = AC : CD \text{ und}$$

$$BF : BK = CD : BC. \text{ Aber auch}$$

$AE : BF = BC : AC$ , folglich, wenn man die Glieder, welche sich aufheben, weg läßt

$$AH : BK = 1 : 1, \text{ also ist } AH = BK.$$

Außer den Kräften  $AE$  und  $BF$  bringe man in  $A$  die Kraft  $AH$  und in  $B$  die Kraft  $BK$  an, so entspringt aus beiden Kräften in  $A$ , die Mittelkraft  $AG$ , und aus den beiden Kräften in  $B$ , die Mittelkraft  $BL$ . Man nehme  $DL = AG$ ;  $DM = BL$  und zeichne das Parallelogramm  $DLMN$ , so wird die Diagonale  $ND$  verlängert durch  $C$  gehen, und man kann in derselben eine Kraft  $DN$  anbringen, welche mit  $AG$  und  $BL$ , also auch mit  $AE$ ,  $AH$ ,  $BF$  und  $BK$  im Gleichgewichte ist. Bringt man die Kraft  $DN$  im Punkte  $C$  an, so muß das Gleichgewicht unter den fünf Kräften  $DN$ ,  $AE$ ,  $AH$ ,  $BF$  und  $BK$  welche am Hebel  $AB$  wirken, noch bestehen (§. 4.) und der Hebel auch ohne Unterstützung in Ruhe bleiben. Aber  $AH = BK$ , daher kann man (§. 8.) diese Kräfte wegnehmen und das Gleichgewicht unter den drei Kräften  $AE$ ,  $BF$  und  $DN$  bleibt ungestört. Wird endlich anstatt der Kraft  $DN$  der Punkt  $C$  befestigt, so kann auch die Kraft  $DN$  weggenommen werden, ohne das Gleichge-

wicht unter den Kräften  $AE = P$  und  $BF = Q$  zu stören. Es sind daher die beiden Kräfte  $AE = P$  und  $BE = Q$  am Hebel  $AB$  im Gleichgewichte, wenn sich  $P : Q = BC : AC$  verhält.

Umgekehrt läßt sich auf eine ähnliche Art beweisen, wenn sich die Kräfte  $P, Q$  im Gleichgewichte befinden, daß sich alsdann die Hebelsarme, an welchen sie angebracht sind, umgekehrt wie diese Kräfte verhalten müssen.

§. 40.

Zusatz. Weil die Kraft  $DN$  zur Erhaltung des Gleichgewichts eben die Wirkung hervor bringt, als wenn man den Punkt  $C$  des Hebels befestigt, so leidet der Punkt  $C$  nach der auf  $AB$  winkelrechten Richtung  $CN$  einen Druck  $= DN$ . Man ziehe  $MO$ ,  $LS$  auf  $CN$  winkelrecht, so ist das Dreieck  $AE G = MNO$  und  $BFI = DMO$ , also  $NO = AE$  und  $OD = BF$ , daher  $DN = NO + OD = AE + BF = P + Q$ . Setzt man nun die Kraft  $DN = R$ , so findet man den Druck welchen der Drehpunkt  $C$  nach einer den Richtungen der Kräfte  $P, Q$  parallelen Richtung leidet, oder

$$(I) R = P + Q.$$

Man setze  $AC = a$ ,  $BC = b$ , so verhält sich

$P : Q = b : a$ , daher ist

$$(II) aP = bQ$$

oder wenn man den Drehpunkt als Mittelpunkt der Momente (§. 27.) annimmt, so ist der grade doppelarmige Hebel im Gleichgewicht, wenn die Momente der Gewichte einander gleich sind.

Sind daher die Hebelsarme  $a$ ,  $b$  nebst einem Gewichte gegeben, so kann man daraus das andere Gewicht finden.

$$(III) \quad P = \frac{bQ}{a} \text{ oder } Q = \frac{aP}{b}.$$

Wären hingegen die beiden Gewichte nebst einem Hebelsarme gegeben, so findet man den zweiten Hebelsarm

$$(IV) \quad a = \frac{bQ}{P} \text{ oder } b = \frac{aP}{Q}.$$

Nimmt man die Unterstützung in  $C$  weg, und bringt dafür die Kraft  $R$  nach einer auf  $AB$  winkelrechten Richtung  $CD$  an, so sind die drei Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  am Hebel  $AB$  im Gleichgewichte. Die Kraft  $Q$  verhindert, daß der Punkt  $B$  nicht ausweicht. Wird daher  $B$  so befestigt, daß sich der Hebel um  $B$  frei drehen kann, so wird  $Q$  entbehrlich, man kann dieses Gewicht weg nehmen, und die beiden Kräfte  $P$  und  $R$  am einarmigen Hebel sind im Gleichgewichte. Es verhielt sich aber

$$P : Q = BC : AC, \text{ daher auch}$$

$$P : P + Q = BC : BC + AC$$

oder weil  $P + Q = R$  und  $BC + AC = BA$  ist

$$P : R = BC : BA, \text{ folglich}$$

$$(V) \quad BA \cdot P = BC \cdot R.$$

Es sind daher auch am einarmigen Hebel zwei Kräfte  $P$  und  $R$  im Gleichgewichte, wenn ihre Momente vom Drehpunkte  $B$  gerechnet gleich sind.

Der Druck auf den Drehpunkt  $B$  ist (I)

$$(VI) \quad Q = R - P.$$

Beispiel. Die Gewichte  $P = 40$  und  $Q = 50$  Pfund, sollen am doppelarmigen Hebel winkelrecht ange-

## Vom Hebel und der Drehungssaxe. 57

bracht werden, wenn der Hebelsarm woran P hängt, 8 Fuß lang ist. Wie groß wird der andere Hebelsarm zum Aufhängen des Gewichts Q seyn müssen?

Nach (IV) findet man, wenn b die gesuchte Länge bezeichnet

$$b = \frac{8 \cdot 40}{50} = 6\frac{2}{5} \text{ Fuß.}$$

§. 41.

**Aufgabe.** Winkelrecht auf den wagerechten graden Hebel AB, Figur 24., welcher an seinen beiden Endpunkten unterstüzt ist, wirkt in C eine Kraft R; man fragt, wie stark die Unterlagen A, B gedrückt werden?

Satz. I.  
Fig. 24.

**Auflösung.** Der Druck auf A sey P, auf B, Q; so wird eine Kraft P winkelrecht auf AB in A angebracht, mit R im Gleichgewichte seyn, wenn man die Unterlage bei A wegnimmt, und B als den Drehpunkt des Hebels ansieht. Es ist aber (§. 40.)

$$P = \frac{BC \cdot R}{AB}$$

und eben so groß muß der Druck auf die Unterlage bei A seyn.

Auf gleiche Weise findet man den Druck auf die Unterlage bei B, oder

$$Q = \frac{AC \cdot R}{AB}.$$

**Beispiel.** Für  $R = 50$  Pfund;  $AB = 16$ ,  $AC = 7$ , also  $CB = 9$  Fuß, ist der Druck auf A oder

$$P = \frac{9 \cdot 50}{16} = 28\frac{1}{2} \text{ Pfund}$$

und der Druck auf B oder

$$Q = \frac{7 \cdot 50}{16} = 21\frac{7}{8} \text{ Pfund.}$$

Auch hätte man  $Q = R - P$  finden können (§. 40. VI.):

**Zusatz.** Wird  $AC = CB$ , oder hängt die Last  $R$  in der Mitte beider Unterlagen, so ist  $P = Q = \frac{1}{2} R$ , oder die Last wird alsdann auf ihre beide Unterlagen gleich vertheilt.

## §. 42.

Kaf. I.  
Fig. 25.

An einem wagerechten graden Hebel  $AB$ , Figur 25., sind mehrere Kräfte  $P, P', P'', P'''$  an dem einen Arm  $AC$ , in Entfernungen  $a, a', a'', a'''$  vom Drehungspunkte  $C$  angebracht, wovon einige nach oben, andere nach unten winkelrecht auf den Hebel wirken; ist ferner winkelrecht an dem andern Hebelsarm  $CB = b$  eine Kraft  $Q$  angebracht, so sind sämtliche Kräfte im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe (\*) der Momente des einen Hebelsarms dem Momente  $b \cdot Q$  des andern Hebelsarms gleich ist; oder wenn

$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = bQ \text{ ist.}$$

**Beweis.** Anstatt  $Q$  sollen in  $B$  zur Hervorbringung des Gleichgewichts mit  $P, P', -P'', P'''$ , vier einzelne Kräfte  $q, q', -q'', q'''$  angebracht werden, so ist erforderlich (§. 40.) daß

$$aP = bq$$

$$a'P' = bq'$$

$$-a''P'' = -bq''$$

$$a'''P''' = bq''' \text{ oder}$$

$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = b(q + q' - q'' + q''') \text{ ist.}$$

---

(\*) Das heißt, die Kräfte wie  $P''$ , welche den untern entgegengesetzt sind, werden negativ in Rechnung gebracht, daher auch ihre Momente das Minuszeichen erhalten.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = b \cdot Q, \text{ daher}$$

$$b(q + q' - q'' + q''') = b \cdot Q, \text{ oder}$$

$$Q = q + q' - q'' + q'''.$$

Nun sind die Kräfte  $P, P', -P'', P'''$  mit  $(q + q' - q'' + q''')$  im Gleichgewichte, daher auch mit  $Q$ .

§. 43.

**Zusatz.** Von den einzelnen Kräften  $q, q', q'', q'''$ , aus welchen die Kraft  $Q$  besteht, wirken  $q, q', q'''$  nach unten und  $q''$  nach oben; oder es drücken die Kräfte  $P, q; P', q'; P''', q'''$  den Drehpunkt  $C$  nach unten, und  $P'', q''$  nach oben (§. 40). Der gesammte Druck  $R$  auf den Drehpunkt  $C$  ist daher

$$R = P + q + P' + q' + P''' + q''' - P'' - q''$$

oder

$$R = P + P' - P'' + P''' + Q$$

d. h. der Druck auf den Drehpunkt des Hebels ist der algebraischen Summe sämmtlicher Kräfte gleich, und eine Kraft von dieser Größe im Punkte  $C$  winkelrecht auf den Hebel nach oben angebracht, wird ebenfalls den Hebel im Gleichgewichte erhalten, wenn die Unterstüßung bei  $C$  weggenommen wird.

§. 44.

Wären an dem einen Arme eines wagerechten graden Hebels  $AB$ , Figur 26., die Kräfte  $P, P', P''$  in Entfernungen  $a, a', a''$  vom Drehpunkte  $C$ , und an dem andern die Kräfte  $Q, Q'$  in Entfernungen  $b, b'$  winkelrecht auf den Hebel angebracht, so sind alle Kräfte

Zaf. I.  
Fig. 26.



im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe der Momente an dem einen Hebelsarme, der algebraischen Summe der Momente am andern Hebelsarme gleich ist, oder wenn

$$aP - a'P' + a''P'' = bQ + b'Q' \text{ ist.}$$

**Beweis.** Dieses Hauptgesetz des Hebels einzusehen, nehme man  $CD = CE = x$ , so ist (§. 42.) in D eine Kraft R mit P, P', P'' im Gleichgewichte, wenn

$$xR = aP - a'P' + a''P'' \text{ ist.}$$

In E nehme man eine Kraft S an, so daß

$$xS = bQ + b'Q' \text{ wird,}$$

alsdann müssen alle Kräfte P, P', P'', Q, Q', R, S im Gleichgewichte seyn.

Weil aber nach der Voraussetzung

$$aP - a'P' + a''P'' = bQ + b'Q' \text{ ist,}$$

so muß auch nach den zuletzt gefundenen Gleichungen  $xR = xS$ , also  $R = S$  seyn; daher können die Kräfte R und S weggenommen werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 8.), und die Kräfte P, P', P'', Q, Q' müssen noch im Gleichgewichte bleiben.

Daß dieser Satz von jeder größern Anzahl von Kräften ebenfalls wahr ist, läßt sich leicht einsehen, weil der Beweis desselben ganz der nämliche ist.

**Zusatz.** Auch folgt hieraus mit Hülfe des vorigen §. daß der Druck auf den Drehpunkt des Hebels, der algebraischen Summe sämtlicher Gewichte gleich ist.

§. 45.

**Aufgabe.** Am wagerechten Hebel A B, Figur 27., wirken mehrere Kräfte winkelrecht auf denselben; man sucht die Entfernung des Drehpunkts C von irgend einem in dem Hebel oder in der Verlängerung desselben angenommenen Punkte O unter der Voraussetzung, daß der Hebel um diesen gesuchten Drehpunkt im Gleichgewichte seyn soll.

Taf. I.  
Fig. 27.

**Auflösung.** Die Entfernung der Richtungen der Kräfte P, P', P'', P''' von O sey e, e', e'', e''', und die gesuchte Entfernung des Umdrehungspunktes oder OC = x, so ist (§. 44.)

$$CA \cdot P - CE \cdot P' = CF \cdot P'' + CB \cdot P''', \text{ oder}$$

$$(x - e)P - (x - e')P' = (e'' - x)P'' + (e''' - x)P'''$$

also

$$xP - xP' + xP'' + xP''' = eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''$$

daher

$$x(P - P' + P'' + P''') = eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''$$

folglich der gesuchte Abstand AC, oder

$$x = \frac{eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

Fällt der Punkt O zwischen die Endpunkte A, B, etwa in O', und man setzt die Abstände O'A = f, O'E = f', O'F = f'', O'B = f''', und O'C = y, so ist

$$CA \cdot P - CE \cdot P' = CF \cdot P'' + CB \cdot P''' \text{ oder}$$

$$(f - y)P - (f' - y)P' = (f'' + y)P'' + (f''' + y)P'''$$

also

$$-yP + yP' - yP'' - yP''' = -fP + f'P' + f''P'' + f'''P'''$$

oder

$$-y(P - P' + P'' + P''') = -fP + f'P' + f''P'' + f'''P'''$$

daher der Abstand  $O'C$  oder

$$-y = \frac{-fP + f'P' + f''P'' - f'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

Ähnliche Resultate würde man erhalten, wenn der Punkt  $O$  in irgend einem andern Punkte des Hebels angenommen wird. Läge  $O$  in  $O''$ , und man setze, daß die Abstände durch  $g, g', g'', g'''$  und  $z$  bezeichnet werden, so findet man  $O''C$  oder

$$z = \frac{-gP - g'P' + g''P'' + g'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

Bei näherer Untersuchung der für  $x, y, z$  gefundenen Werthe ergibt sich, daß der Nenner die algebraische Summe der Kräfte enthält, und daß im Zähler die algebraische Summe der Momente mit Bezug auf die Lage der angenommenen Punkte  $O, O'$  oder  $O''$  enthalten ist.

Werden nämlich, wie erforderlich ist, alle nach oben wirkende Kräfte negativ in Rechnung gebracht, und eben so alle Abstände, welche rückwärts von den Punkten  $O'$  oder  $O''$  nach  $A$  zu genommen werden, ebenfalls negativ gerechnet, so kann man die Zähler der für  $x, y, z$  gefundenen Brüche als algebraische Summe der Momente der Kräfte ansehen. Auch sieht man hieraus, daß das Minuszeichen vor  $y$  hier so viel bedeutet, daß von  $O'$  ab,  $O'C$  oder  $y$  nicht nach  $B$  hin, sondern rückwärts nach  $A$  hin, genommen werden soll.

Zaf. I.  
Fig. 27.

Man findet daher ganz allgemein die Entfernung des Drehungspunktes von irgend einem innerhalb oder in der Verlängerung eines He-

bels liegenden Punkte, wenn man diesen Punkt als Mittelpunkt der Momente (§. 27.) annimmt, und die algebraische Summe der Momente, durch die algebraische Summe der Gewichte dividirt.

1. Beispiel. Wäre O der Mittelpunkt der Momente, so sey  $e = 5$ ,  $e' = 11$ ,  $e'' = 17$ ,  $e''' = 20$  Fuß, und  $P = 12$ ,  $P' = -9$ ,  $P'' = 8$ ,  $P''' = 10$  Pfund, so findet man OC oder

$$x = \frac{5 \cdot 12 - 11 \cdot 9 + 17 \cdot 8 + 20 \cdot 10}{12 - 9 + 8 + 10} = 14\frac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Wenn O' als Mittelpunkt der Momente angenommen wird, so sey  $e = -10$ ,  $e' = -4$ ,  $e'' = 2$ ,  $e''' = 5$  Fuß, und  $P = 12$ ,  $P' = -9$ ,  $P'' = 8$ ,  $P''' = 10$  Pfund, so ist O'C oder

$$x = \frac{-10 \cdot 12 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{12 - 9 + 8 + 10} = -\frac{6}{7} \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Wird A als Mittelpunkt der Momente angenommen, so ist  $e = 0$ . Nun sey  $e' = 6$ ,  $e'' = 12$ ,  $e''' = 15$  Fuß, und  $P = 12$ ,  $P' = -9$ ,  $P'' = 8$ ,  $P''' = 10$  Pfund, so wird AC oder

$$x = \frac{0 \cdot 12 - 6 \cdot 9 + 12 \cdot 8 + 15 \cdot 10}{12 - 9 + 8 + 10} = 9\frac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

#### §. 46.

Der nach winkelrechter Richtung auf den Hebel entstehende Druck R auf den Drehpunkt C, Figur 27., ist der algebraischen Summe von den Kräften P, P', P'', P''' gleich (§. 44.); daher wenn  $R = P - P' + P'' + P'''$  nach der auf AB winkelrechten Richtung CR angebracht, und die Befestigung bei C weggenommen wird, so sind die Kräfte P, P', P'', P''', R im Gleichgewichte. Wird O als Mittelpunkt der Momente angenommen, so ist nach dem vorigen §.

Taf. I.  
Fig. 27.

$$xR = eP - e'P' + e''P'' + e'''P''' \text{ oder}$$

$$xR + e'P' = eP + e''P'' + e'''P'''.$$

Eben so erhält man für die Punkte O' und O''

$$fP = yR + f'P' + f''P'' + f'''P''' \text{ und}$$

$$zR + gP + g'P' = g''P'' + g'''P''';$$

daher sind an einem jeden nicht unterstützten graden Hebel die auf ihn winkelrecht angebrachten Kräfte im Gleichgewichte, wenn von einem willkürlich angenommenen Mittelpunkte der Momente

I. die Summe der Momente der Kräfte, welche den Hebel, nach einerlei Richtung, um den Mittelpunkt der Momente zu drehen streben, der Summe der Momente derjenigen Kräfte, welche nach entgegengesetzter Richtung wirken, gleich sind,

und

II. wenn die Summe der Kräfte, welche nach einerlei Richtung wirken, der Summe der Kräfte, welche nach entgegengesetzter Richtung angebracht worden, gleich sind.

Es ist wohl zu bemerken, daß die erste Bedingung allein nicht zureicht, das Gleichgewicht unter den Kräften eines graden nicht unterstützten Hebels zu beurtheilen.

#### §. 47.

Die allgemeinen Ausdrücke des vorigen §. können noch dazu dienen, die Fundamentalgleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts am graden nicht unterstützten Hebel zu entwickeln. Denn es ist

$$(I) \quad eP - e'P' + e''P'' + e'''P''' - xR = 0$$

$$(II) \quad P - P' + P'' + P''' - R = 0$$

d. h. an einem nicht unterstützten graden Hebel sind sämtliche darauf winkelrecht wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wenn für einen willkürlich angenommenen Mittelpunkt der Momente, die algebraische Summe der Momente sowohl, als die algebraische Summe der Kräfte selbst  $= 0$  ist.

Zusatz. Befinden sich an dem nicht unterstützten graden Hebel  $AE$ , Figur 27., zwei gleich große Kräfte  $P$  und  $P'$  in  $A$  und  $E$ , welche nach parallelen aber entgegengesetzten Richtungen  $AP$  und  $EP'$  wirken, so können solche nicht durch Hinzufügung einer einzigen Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden, sondern es sind zwei Kräfte zur Bewirkung des Gleichgewichtes erforderlich. Denn man nehme  $A$  zum Mittelpunkt der Momente, und es sey  $R$  die am Abstände  $x$  nöthige Kraft; so wird, wenn diese drei Kräfte im Gleichgewichte seyn sollen,  $0 = R + P - P'$  und  $0 = xR - AE \cdot P'$ , also  $x = \frac{AE \cdot P'}{R}$ , oder weil  $R = P - P'$  und  $P = P'$  also  $R = 0$  ist,

$$x = \frac{AE \cdot P'}{0} = \infty;$$

man müßte daher in einer unendlich großen Entfernung von  $A$  eine Kraft  $R = 0$  anbringen, um den beiden gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräften  $P, P'$  das Gleichgewicht zu halten. Da sich dies nicht bewerkstelligen läßt, so folgt hieraus, daß es unmöglich

Satz I.  
Fig. 27.

ist, unter diesen Umständen die Kräfte  $P, P'$  durch eine einzige Kraft ins Gleichgewicht zu bringen. Nur durch zwei Kräfte kann dies geschehen, und wie sich leicht übersehen läßt, auf sehr verschiedene Weise bewerkstelligt werden. Ein dergleichen entgegengesetzt wirkendes Kräftepaar, heißt bei französischen Schriftstellern *un couple*.

## §. 48.

Zaf. I.  
Fig. 28.

Die Richtungen  $A'P, B'Q, DR$ , Figur 28., von den Kräften  $P, Q, R$  fallen in die feste gewichtlose Ebene  $YZ$ ; sind nun überdies diese drei Kräfte im Gleichgewichte, und man nimmt in der Richtung der Kraft  $R$  einen willkürlichen Punkt  $C$  an, und befestigt denselben dergestalt, daß sich die Ebene  $YZ$  um  $C$  frei drehen kann, so wird das Gleichgewicht noch bestehen. Der feste Stützpunkt  $C$  hebt den Druck der Kraft  $R$  auf, und man kann diese Kraft weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören. Es sind alsdann in der Ebene  $YZ$  die Kräfte  $P$  und  $Q$ , deren Stützpunkt  $C$  in die Richtung ihrer Mittelkraft fällt, mit einander im Gleichgewichte, und daher auch, wenn  $CA, CB$  auf  $A'P, B'Q$  senkrecht sind, die Momente  $CA \cdot P$  und  $CB \cdot Q$  (§. 27.) einander gleich.

Die Kraft  $P$  wirke am Punkte  $E$ ;  $Q$  an  $F$  (§. 4.), und man ziehe in der festen Ebene  $YZ$  die Linien  $CE, CF$ , so bilden solche einen Winkelhebel, und wenn man diese Linien so mit einander verbunden annimmt, daß sie sich um den Punkt  $C$  frei drehen, dabei aber kein Hebelsarm ohne den andern in Be-

Bewegung kommt, so kann man die feste Ebene weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören, weil die Kräfte noch eben so wie vorher in den Punkten E und F nach ihren Richtungen angebracht bleiben, und nicht weichen können, so daß die gewichtlose Ebene nunmehr zur Erhaltung des Gleichgewichts nichts beitragen kann.

Da dieser Satz von jeder Lage der Linien CE und CF gilt, so müssen eben so wie bei dem graden Hebel (§. 40.) auch an jedem Winkelhebel zwei Kräfte P, Q im Gleichgewichte seyn, wenn ihre Momente  $CA \cdot P$  und  $CB \cdot Q$  einander gleich sind.

Auch läßt sich leicht einsehen, daß es ganz gleichgültig ist, ob die Hebelsarme grade oder auf irgend eine Art wie Figur 29. gebogen sind, wenn solche nur hinlängliche Festigkeit haben, und die Momente  $CA \cdot P$  und  $CB \cdot Q$  einander gleich bleiben, so wird auch der Hebel in Ruhe seyn.

Taf. I.  
Fig. 29.

Umgekehrt läßt sich eben so beweisen, daß wenn zwei Kräfte an irgend einem Hebel mit einander im Gleichgewichte sind, so müssen auch ihre Momente einander gleich seyn.

#### §. 49.

**Aufgabe.** An einem nicht unterstützten graden Hebel AB, Figur 30., sind drei Kräfte P, Q, R in A, B, C nach ganz verschiedenen Richtungen, welche in einerlei Ebene liegen, angebracht. Man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht.

Taf. I.  
Fig. 30.

**Auflösung.** Man setze die Länge  $AC = a$ ,  $AB = b$ , den Winkel  $OAP = \alpha$ ,  $ABQ = \beta$ ,



$BCR = \gamma$ , so ist nach §. 29. (I), (II) und (III), weil hier  $\gamma + 180^\circ$  dem dortigen  $\Phi$  gleich ist,

$$(I) \quad P \sin \alpha + Q \sin \beta = R \sin \gamma$$

$$(II) \quad P \cos \alpha + Q \cos \beta = R \cos \gamma$$

$$(III) \quad bQ \sin \beta = aR \sin \gamma$$

welches die drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht unter den Kräften  $P, Q, R$  sind. Die verlängerten Richtungen der Kräfte  $P, Q$  müssen sich daher nach §. 29. in einem gemeinschaftlichen Punkte der Richtung  $CR$  schneiden.

Auf eine ähnliche Art wie §. 29. findet man die Kraft (IV)  $R = \sqrt{[(P \sin \alpha + Q \sin \beta)^2 + (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2]}$ . Ferner den Winkel  $BCR$ , welchen die Richtung der Kraft  $R$  mit dem Hebel einschließt, oder

$$(V) \quad \operatorname{tgt} \gamma = \frac{P \sin \alpha + Q \sin \beta}{P \cos \alpha + Q \cos \beta}$$

und endlich den Abstand  $AC$  oder

$$(VI) \quad a = \frac{bQ \sin \beta}{P \sin \alpha + Q \sin \beta}$$

§. 50.

**Zusatz.** Wenn an einem Hebel die drei Kräfte  $P, Q, R$  unter den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  angebracht im Gleichgewichte sind, so müssen diese Kräfte an denselben Punkten des Hebels, aber unter den Ergänzungswinkeln zu zwei rechten angebracht, ebenfalls im Gleichgewichte bleiben.

Zus. I.

Fig. 31.

Denn man nehme Figur 31.

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha \text{ statt } \alpha$$

$$\beta' = 180^\circ - \beta \text{ statt } \beta \text{ und}$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma \text{ statt } \gamma$$

so bleiben die Bedingungsgleichungen (I) und (III) ungedändert, weil  $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  ist. Dagegen erhält man  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ; weil aber deshalb alle drei Glieder der Gleichung (II) negativ werden, welche vorher positiv gewesen sind, so muß die Gleichheit auch noch bestehen, daher müssen auch die Kräfte  $P, Q, R$  unter den Winkeln  $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$  einander noch im Gleichgewichte erhalten, wenn sie vorher unter den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  angebracht, im Gleichgewichte waren.

Wären z. B. die drei Kräfte  $P, Q, R$  unter den Winkeln von 32, 107 und 75 Grad angebracht, mit einander im Gleichgewichte, so wird dies auch noch unter den Winkeln 148, 73 und 105 Grad bestehen.

### §. 51.

**Aufgabe.** Der Hebel  $AB$ , Figur 32., nebst den Kräften  $P, Q, R$  welche an den Punkten  $A, B, C$  angebracht werden sollen, sind in Linien gegeben; man soll die Richtungen dieser Kräfte für das Gleichgewicht durch Zeichnung finden.

Kat. II.  
Fig. 32.

**Auflösung.** Auf der willkürlich gezogenen Linie  $DF$  nehme man  $DE = BC, EF = CA$ , und zeichne über  $DE$  das Dreieck  $DEG$  dergestalt, daß sich verhält  $DE : EG : DG = P : Q : R$ .

Man ergänze das Parallelogramm  $DEGH$ , ziehe  $FG$  bis  $I$ , trage aus  $I$  nach  $F$  die Linie  $BA$  bis  $K$ , so wird  $IK = AB$ . Nun ziehe man durch  $K$  die Linie  $KA'$  mit  $DI$  parallel, und durch  $A'$  mit  $KI$  die Linie  $A'B'$ , verlängere  $DG$  bis  $C'$ , so ist

$A'C'B'$  dem gegebenen Hebel  $ACB$  gleich, und  $A'P$ ,  $B'Q$ ,  $C'R$  sind die gesuchten Richtungen der Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  für das Gleichgewicht.

Fällt der Punkt  $K$  in  $K'$  zwischen  $F$  und  $I$ , so muß die Linie  $K'A''$  ebenfalls mit  $DI$  parallel gezogen werden, bis solche die Linie  $DF$  in  $A''$  schneidet. Alsdann giebt eine durch  $A''$  mit  $FI$  gezogene Parallellinie die gesuchte Lage des Hebels.

**Beweis.** Im Parallelogramme  $DEGH$  verhalten sich die Seiten  $DE$ ,  $DH$ ,  $DG$  wie die Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , daher müssen diese nach den bestimmten Richtungen angebracht einander im Gleichgewicht erhalten. Aber  $KI = AB$  und  $KI = A'B'$ , daher auch  $A'B' = AB$ . Ferner verhält sich

$$FE : ED = FG : GI$$

$$FG : GI = A'C' : C'B', \text{ also}$$

$$FE : ED = A'C' : C'B' \text{ oder weil } FE = AC \text{ und } ED = BC$$

$$AC : CB = A'C' : C'B'. \text{ Aber } AB = A'B' \text{ daher auch}$$

$$AC = A'C' \text{ und } CB = C'B'.$$

Aus den hier gefundenen Richtungen der Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  lassen sich für denselben Hebel noch drei andere verschiedene Richtungen nach §. 50. angeben, bei welchen diese Kräfte ebenfalls im Gleichgewichte sind, wenn man statt der gefundenen Richtungen, die Ergänzungswinkel derselben zu zwei rechten Winkeln annimmt.

Uebrigens wird erfordert, daß jede zwei Kräfte

zusammengenommen größer als die dritte sind. Denn wäre  $P + Q = R$ , so muß sich, wenn die Auflösung möglich seyn soll,  $P : Q = BC : AC$  verhalten; alsdann ist aber die Aufgabe nach §. 40. dadurch aufgelöst, daß man die Gewichte winkelmäßig auf den Hebel anbringt. Wären aber zwei Kräfte kleiner als die dritte, so ist die Auflösung nach §. 18. unmöglich.

§. 52.

**Aufgabe.** An einem willkürlich gebogenen Hebel  $ACB$ , Figur 33. und 34., dessen Drehpunkt in  $C$  gegeben ist, sollen zwei gegebene Kräfte  $P$  und  $Q$  in  $A$  und  $B$  so angebracht werden, daß solche einander das Gleichgewicht halten; man sucht die Richtungen dieser Kräfte.

Taf. II.  
Fig. 33. u. 34.

**Auflösung.** Aus  $C$  werden die Linien  $CA$  und  $CB$  gezogen, und über denselben die Kreise  $ADC'B'$  und  $BEC'E'$  beschrieben. Ferner nehme man

$$CF : CG = Q : P$$

so  $CF$  und  $CG$  kleiner als  $CA$  und  $CB$  seyn müssen. Mit dem Halbmesser  $CF$  und  $CG$  beschreibe man aus  $C$  die Bogen  $DFD'$  und  $EGE'$ , bis solche die zuerst gezeichneten Kreise in  $D$ ,  $D'$  und  $E$ ,  $E'$  schneiden, ziehe die Linien  $AD$  und  $BE$ , so geben solche die Richtungen  $AP$  und  $BQ$  für die Kräfte  $P$  und  $Q$ .

Auch kann man die Punkte  $AD'$  und  $BE'$  mit einander durch grade Linien verbinden, so erhält man dadurch zwei andere Richtungen  $AP'$  und  $BQ'$ , nach welchen die Kräfte  $P$  und  $Q$  angebracht ebenfalls im Gleichgewichte sind.

**Beweis.** In den Halbkreisen  $ADC$  und  $BEC$  ist  $CD$  und  $CE$  winkelrecht auf  $AD$  und  $BE$ . Aber  $CD = CF$  und  $CE = CG$ , daher weil

$CF : CG = Q : P$  so verhält sich auch

$CD : CE = Q : P$  folglich ist §. 39.  $P$  mit  $Q$  im Gleichgewichte.

Dasselbe gilt für die Richtungen  $AP'$  und  $BQ'$ .

**Zusatz.** Wird die Linie  $CF$  größer oder kleiner angenommen, so daß  $F$  mehr nach  $A$  oder  $C$  rückt, so entstehen so viel verschiedene Richtungen für die Kräfte  $P$  und  $Q$ , als man zusammengehörige Punkte  $F$  und  $G$  zwischen  $AC$  und  $BC$  annehmen kann, und in allen diesen Fällen müssen die Kräfte  $P$ ,  $Q$  im Gleichgewichte bleiben, weshalb diese Aufgabe eine unzählige Menge von Auflösungen zuläßt. Ist hingegen die Richtung einer von den gegebenen Kräften bestimmt, so erhält man nur zwei mögliche Richtungen für das Gleichgewicht, es sey denn, daß die Auflösung in dem Falle unmöglich werde, wenn z. B. die Kraft  $P$  und ihre Richtung nebst der Kraft  $Q$  gegeben ist, und man fände aus der Proportion

$$Q : P = CD : CE$$

die Linie  $CE$  größer als die gegebene Linie  $CB$ , weil in diesem Falle der Punkt  $E$  nicht in den Umfang des über  $CB$  beschriebenen Kreises fallen kann.

§. 53.

An dem willkürlich gebogenen Hebel  $AA''$ , Fig. 35., welcher in  $C$  seinen Drehungspunkt hat, wirken Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  nach verschiedenen Richtun-

gen, deren winkelrechte Abstände von C, oder  $CD = a$ ,  $CD' = a'$ ,  $CD'' = a''$ ,  $CD''' = a'''$  sind; so ist unter diesen Kräften ein Gleichgewicht, wenn man den Drehpunkt als Mittelpunkt der Momente annimmt, und die Summe der Momente von den Kräften, welche den Hebel auf die eine Seite umzudrehen streben, der Summe der Momente von den Kräften gleich ist, welche eine entgegengesetzte Umdrehung bewirken würden, oder wenn

$$aP + a'P' = a''P'' + a'''P'''.$$

**Beweis.** Man verbinde mit dem gebogenen Hebel  $AA'''$  einen graden Hebel  $dd'''$ , so daß beide den gemeinschaftlichen Drehungspunkt C erhalten, und einer ohne den andern nicht bewegt werden kann. Nun nehme man  $CD = Cd = a$ ,  $CD' = Cd' = a'$ ,  $CD'' = Cd'' = a''$ ,  $CD''' = Cd''' = a'''$ ; bringe winkelrecht auf  $dd'''$  in  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$

die Kräfte  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  an,

welche den Kräften  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$

gleich seyn sollen, und den Hebel  $dd'''$  nach entgegengesetzter Seite zu drehen streben, so halten die Kräfte  $P$ ,  $p$ ;  $P'$ ,  $p'$ ;  $P''$ ,  $p''$ ;  $P'''$ ,  $p'''$  einander das Gleichgewicht (§. 48.), oder der Hebel ist in Ruhe. Weil aber nach der Voraussetzung  $aP + a'P' = a''P'' + a'''P'''$  ist, so sind (§. 45.) die Kräfte  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  unter sich im Gleichgewichte, und der Hebel muß in Ruhe bleiben, wenn auch diese Kräfte weggenommen werden (§. 8.); daher halten sich die Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  unter den oben angeführten Bedingungen das Gleichgewicht.

## §. 54.

**Zusatz.** Sind die Richtungen sämtlicher Kräfte mit einander parallel, so fallen sämtliche Abstände wie  $CD, CD', CD'', \dots$  in eine einzige grade Linie, welche man statt des zweiten graden Hebels  $dd''$  annehmen kann. Der Druck sämtlicher Kräfte auf den Drehpunkt ist alsdann ihrer algebraischen Summe gleich, und die Richtung dieses Drucks ist mit den Richtungen der Kräfte parallel.

## §. 55.

Taf. II.  
Fig. 36.

Ein graden Hebel  $AA'''$ , Figur 36., dessen Drehpunkt in  $C$  liegt, sind die nach verschiedenen Richtungen angebrachten Kräfte  $P, P', P'', P'''$  im Gleichgewichte. Man setze die Entfernungen der Angriffspunkte vom Drehpunkt, oder  $CA = b, CA' = b', CA'' = b'', CA''' = b'''$ , und die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit dem Hebel einschließen,  $CA P = \alpha, CA' P' = \alpha', CA'' P'' = \alpha'', CA''' P''' = \alpha'''$ , so ist alsdann:

$b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha' = b'' P'' \sin \alpha'' + b''' P''' \sin \alpha'''$ ,  
wo die Kräfte  $P, P'$  den Hebel nach einer, und die Kräfte  $P'', P'''$  nach der entgegengesetzten Seite drehen.

**Beweis.** Man ziehe die Linien  $CD, CD', CD'', CD'''$  auf die Richtungen der Kräfte  $P, P', P'', P'''$  senkrecht, so ist für das Gleichgewicht erforderlich, daß (§. 53.)

$CD \cdot P + CD' \cdot P' = CD'' \cdot P'' + CD''' \cdot P'''$  ist.  
Aber  $CD = b \sin \alpha, CD' = b' \sin \alpha', CD'' = b'' \sin \alpha'',$

$CD''' = b''' \sin \alpha'''$ , wodurch man die obenstehende Gleichung erhält.

Dieser Satz läßt sich eben so für jede noch so große Anzahl von Kräften beweisen.

§. 56.

Sind sämtliche auf den graden Hebel wirkende Kräfte nebst ihren Richtungen gegeben, so kann hieraus die Entfernung des Drehpunkts C, Figur 36., von irgend einem innerhalb oder in der Verlängerung des Hebels angenommenen Mittelpunkte der Momente gefunden werden. Es sey O dieser Mittelpunkt, ferner  $OA = e$ ,  $OA' = e'$ ,  $OA'' = e''$ ,  $OA''' = e'''$  und  $OC = x$ , so ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §.

Taf. II.  
Fig. 36.

$b = x - e$ ,  $b' = x - e'$ ,  $b'' = x - e''$ ,  $b''' = e''' - x$  daher

$$(x - e) P \sin \alpha + (x - e') P' \sin \alpha' + (e''' - x) P''' \sin \alpha'''$$

und hieraus findet man die Entfernung des Umdrehungspunktes C vom Mittelpunkte der Momente O, oder

$$x = \frac{e P \sin \alpha - e' P' \sin \alpha' + e'' P'' \sin \alpha'' + e''' P''' \sin \alpha'''}{P \sin \alpha - P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha'''}$$

Beispiel. Am Hebel AB, Figur 37., sey  $P = 60$ ,  $P' = 80$  Pfund; der Winkel  $PAB = \alpha = 130^\circ$ ,  $P'BC = \alpha' = 105^\circ$ . Wird nun A als Anfangspunkt statt O genommen, so ist  $e = 0$ ,  $e' = AB = 10$  Fuß, daher der Abstand des Umdrehungspunktes C von A oder

Fig. 37.

$$\begin{aligned} x &= \frac{- e' P' \sin \alpha'}{P \sin \alpha - P' \sin \alpha'} = \frac{- 10 \cdot 80 \cdot 0,966}{60 \cdot 0,766 - 80 \cdot 0,966} \\ &= \frac{- 772,8}{- 31,32} = 24,67 \text{ Fuß.} \end{aligned}$$



## §. 57.

Wären die Richtungen sämtlicher Kräfte mit einander parallel, also unter irgend einem Winkel  $\beta$  gegen den graden Hebel geneigt, so ist

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \beta$$

daher für diesen Fall die Entfernung

$$x = \frac{eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

wie §. 46. Es entsteht daher, wenn Kräfte nach parallelen Richtungen an einem graden Hebel wirken, unter eben den Bedingungen ein Gleichgewicht, als wenn diese Kräfte winkeltrecht auf den Hebel angebracht wären, oder

Gewichte am graden Hebel, welche in irgend einer Lage desselben aufgehangen im Gleichgewichte sind, bleiben bei jeder Lage des Hebels in Ruhe.

## §. 58.

**Aufgabe.** Am gebogenen Hebel  $AA''$ , Figur 38., sind mehrere Kräfte  $P, P', P''$  nach verschiedenen Richtungen angebracht, mit einander im Gleichgewichte; man sucht den Druck, welcher von diesen Kräften auf den Drehpunkt  $C$  entsteht.

Kaf. II.  
Fig. 38.

**Auflösung.** Durch  $C$  werde willkürlich eine grade Linie  $DD'$  gezogen, so läßt sich jede der gegebenen Kräfte, wie z. B.  $P$ , in zwei andere zerlegen, wovon die eine  $p$  winkeltrecht auf  $DD'$  und die andere  $q$  parallel mit  $DD'$  ist. Statt der Kräfte  $P, P', P''$  entstehen daher die Kräfte  $p, p', p''$  und  $q, q', q''$ , von welchen  $p, p', p''$  winkeltrecht auf die Linie  $DD'$

gerichtet sind, und daher nach §. 54. den Punkt C eben so drücken, als wenn sie unmittelbar in C auf  $DD'$  winkelrecht angebracht wären. Ferner wirken die Kräfte  $q, q', q''$  mit  $DD'$  parallel, also entsteht auch von diesen ein Druck auf den Punkt C (§. 54.), welcher eben so groß ist, als wenn solche daselbst nach ihrer gemeinschaftlichen Richtung  $DD'$  angebracht werden. Bringt man daher sämtliche Kräfte  $p, p', p'', q, q', q''$  auf den Punkt C nach ihren Richtungen, so lassen sich aus zwei und zwei, wie  $p, q; p', q'$  und  $p'', q''$  die Kräfte  $\Pi, \Pi', \Pi''$  zusammensetzen, welche genau den Kräften  $P, P', P''$  gleich, und in Absicht der Richtungen parallel sind.

Taf. II.  
Fig. 88.

Hieraus folgt ganz allgemein, daß wenn mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen an einem gebogenen Hebel angebracht im Gleichgewichte sind, so ist der Druck auf den Drehpunkt eben so groß, als wenn diese Kräfte unmittelbar am Drehpunkte nach Richtungen angebracht wären, die mit ihren ersten Richtungen parallel sind.

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich leicht die Größe und Richtung des Drucks auf den Drehpunkt finden, wenn nach §. 24. die Größe und Richtung der Mittelkraft gesucht wird. Auch sieht man hieraus, wie die Größe und Lage einer Gegenkraft  $R$  gefunden werden kann, welche mehreren nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften an einem gebogenen Hebel das Gleichgewicht hält.

## §. 59.

**Aufgabe.** Mehrere Kräfte wirken in verschiedenen Punkten einer festen Ebene unter gegebenen Richtungen, welche sämmtlich in diese Ebene fallen; man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht.

**Auflösung.** Durch eine willkürliche Linie  $OZ$ ,  
 Taf. II. Figur 39., sey die Richtung und Lage der Kräfte  $P$ ,  
 Fig. 39.  $P'$ ,  $P''$  ... dadurch bestimmt, daß sämmtliche Winkel wie  $OAP = \alpha$ ,  $OA'P' = \alpha'$ ,  $OA''P'' = \alpha''$  ... nebst den Entfernungen  $OA = b$ ,  $OA' = b'$ ,  $OA'' = b''$  ... gegeben sind, wobei zu bemerken ist, daß die Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha'$  ... von  $O$  bis 360 Grad von der Linie  $OZ$  an abwärts auf einerlei Weise gemessen werden.

Gesetzt daß nur die beiden Kräfte  $P$ ,  $P'$  vorhanden wären, so läßt sich statt derselben eine dritte  $R$  angeben, welche eben die Wirkung wie  $P$ ,  $P'$  hervorbringt, und deren Neigungswinkel gegen  $OZ = \Phi$  und Entfernung auf der Linie  $OA = r$  nach §. 29. gefunden werden kann. Alsdann ist für diese drei Kräfte nach §. 30. I. II. III.

$$R \sin \Phi = P \sin \alpha + P' \sin \alpha'$$

$$R \cos \Phi = P \cos \alpha + P' \cos \alpha'$$

$$rR \sin \Phi = bP \sin \alpha + b'P' \sin \alpha'.$$

Statt der Kräfte  $P$ ,  $P'$  kann man nun die Kraft  $R$  setzen, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, und daher mit  $P''$ ,  $P'''$  im Gleichgewichte seyn muß. Für diesen Fall wird aber erfordert (§. 29.), daß

$$R \sin \Phi + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' = 0$$

$$R \cos \Phi + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' = 0 \text{ und}$$

$$rR \sin \Phi + b''P'' \sin \alpha'' + b'''P''' \sin \alpha''' = 0 \text{ sey.}$$

Setzt man statt der ersten Glieder dieser Gleichungen die vorhin gefundenen Werthe, so findet man

$$P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' = 0$$

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' = 0$$

$$b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha' + b'' P'' \sin \alpha'' + b''' P''' \sin \alpha''' = 0.$$

Wären fünf Kräfte in der Ebene angebracht, so könnte man mit Hülfe der letzten Gleichungen eine Kraft  $R'$  angeben, welche den drei Kräften  $P, P', P''$  das Gleichgewicht hält, und wenn  $R'$  statt  $P, P', P''$  angebracht ist, so kann man  $R'$  mit den beiden übrigen Kräften  $P''', P''''$  in Verbindung bringen, woraus ganz ähnliche Resultate wie vorhin entstehen. Eben so würde man bei sechs und mehrern Kräften verfahren, so daß man ganz allgemein als Bedingung für das Gleichgewicht unter jeder Anzahl von Kräften, welche nach beliebigen Richtungen in einerlei Ebene wirken, folgende drei Gleichungen erhält:

$$(I) \quad P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \dots = 0$$

$$(II) \quad P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots = 0$$

$$(III) \quad b P \sin \alpha + b' P' \sin \alpha' + b'' P'' \sin \alpha'' + \dots = 0.$$

§. 60.

Befindet sich in einer festen Ebene eine Linie, welche so gehalten oder befestigt wird, daß sich die Ebene um diese Linie frei drehen kann, die Linie selbst aber ihre Lage unverändert behält, so heißt solche eine feste Ase oder eine Drehaxe. Dagegen nennt man diejenige Linie, auf welche sämtliche Momente der Kräfte bezogen werden, die Ase der Momente.

Sind mehrere Punkte durch feste unbiegsame Li-

nien oder auf irgend eine Weise mittelst eines festen gewichtlosen Körpers so mit einander verbunden, daß keiner dieser Punkte in Bewegung gesetzt werden kann, ohne zugleich den übrigen Punkten eine Bewegung mitzutheilen, so heißt diese Verbindung von Punkten ein System. Durch die Bewegung eines solchen Systems kann dasselbe zwar jede willkürliche Lage erhalten, aber von jedem einzelnen Punkte desselben wird voraus gesetzt, daß er auch alsdann noch seine Lage gegen die übrigen Punkte behält, oder daß die wechselseitigen Entfernungen der Punkte von einander unverändert bleibt.

## §. 61.

Wirken mehrere Kräfte auf eine feste Ebene winkelfrecht, und man nimmt an, daß die Drehaxe mit der Axe der Momente zusammenfällt, so sind sämtliche Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Summe der Momente von den Kräften, welche die Ebene auf eine Seite der Axe zu drehen streben, der Summe der Momente von den entgegengesetzt wirkenden Kräften gleich ist.

Zaf. II.  
Fig. 40.  
und 41.

**Beweis.** Es sey, Figur 40. und 41.,  $XY$  eine feste Ebene, und  $MN$  ihre Drehaxe. Auf diese Ebene winkelfrecht in  $A, B$  wirken Kräfte  $P, Q$  nach den Richtungen  $AP, BQ$ , deren winkelfrechte Abstände von der Drehaxe  $DA$  und  $EB$  sind. Ist nun das Moment  $AD \cdot P = BE \cdot Q$ , und man zieht die Linie  $AB$ , welche die Drehaxe in  $C$  schneidet, so sind die Dreiecke  $ACD$  und  $BCE$  ähnlich; daher verhält sich

$AD : BE = CA : CB$ . Aber weil  $AD \cdot P = BE \cdot Q$  so verhält sich auch

$AD : BE = Q : P$ , daher

$CA : CB = Q : P$ .

Da nun der Punkt C als hinlänglich unterstützt angesehen werden kann, so sind (§. 39. und 40.) die Kräfte P, Q in der Ebene XY mit einander im Gleichgewichte.

So wie dieser Beweis für die beiden Kräfte P und Q geführt worden, läßt er sich auf jede Anzahl von Kräften ausdehnen, welche auf der Ebene XY winkelmäßig sind.

§. 62.

1. Zusatz. Von den Gewichten P, Q leide der Punkt C einen Druck  $= R$ , so ist (§. 41.)

$$R = \frac{AB}{AC} \cdot Q.$$

Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und BCE verhält sich aber

$AB : AC = DE : DC$ , daher ist

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}, \text{ also auch } R = \frac{DE}{DC} \cdot Q.$$

Stellt man sich nun vor, daß die Kräfte P, Q in den Punkten D und E mit ihren vorherigen Richtungen parallel angebracht wären, so fände man ebenfalls (§. 40.) den Druck auf den Punkt C

$$R = \frac{DE}{DC} \cdot Q$$

daher leidet die Drehaxe von den Kräften P, Q einen Druck, welcher eben so groß ist, als wenn

diese Kräfte nach ihren Richtungen unmittelbar in den Punkten D und E der Drehaxe angebracht wären.

Man vergleiche hiemit §. 58.

§. 63.

2. Zusatz. Wird die feste Ase in zwei Punkten M und N gehalten, so ist es nun leicht, die Pressungen auf diese Punkte zu bestimmen. Man erhält nemlich (§. 46.)

den Druck auf M

$$= \frac{ND \cdot P \pm NE \cdot Q}{MN}$$

und den Druck auf N

$$= \frac{MD \cdot P \pm ME \cdot Q}{MN}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn Q nach einerlei Richtung mit P zieht, das untere aber, wenn die Richtungen von P und Q entgegengesetzt sind.

§. 64.

Zaf. II.  
Fig. 42.

Zwei feste Ebenen NM', NN', Figur 42., sind unter einem beliebigen Winkel an der festen Ase MN mit einander verbunden. In A, B wirken Kräfte P, Q, winkeltrecht auf die Ebenen nach AP, BQ, in Entfernungen AC, BD von der Ase MN, so wird P mit Q im Gleichgewichte seyn, wenn  $AC \cdot P = BD \cdot Q$  ist.

Beweis. Man nehme in der Ebene NN' auf MN winkeltrecht  $Cb = BD$ , und bringe in b, winkeltrecht auf NN' die Kräfte Q' und Q' jede = Q an, so ist P mit Q' (§. 39.) und Q' mit Q im Gleichgewichte. Aber es ist auch Q' mit Q' im Gleichgewichte;

daher kann man  $Q'$ ,  $Q''$  wegnehmen, und  $P$ ,  $Q$  bleiben noch in Ruhe.

Da sich dieser Satz eben so für mehrere Kräfte beweisen läßt, so folgt allgemein, daß, wenn die Momente von der gemeinschaftlichen Drehaxe genommen werden, mehrere Kräfte welche winkelrecht auf verschiedene Ebenen wirken, die durch eine gemeinschaftliche Drehaxe gehen, halten einander das Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente von denjenigen Kräften, welche die Ebenen nach einer Seite zu drehen streben, der Summe der Momente in Bezug auf die entgegengesetzte Umdrehung gleich ist.

§. 65.

Die Kräfte  $P$ ,  $Q'$ , Figur 42., drücken die Axe  $MN$  eben so, als wenn solche in  $C$  nach paralleler Richtung mit  $P$  und  $Q''$  nach  $Cp$  und  $Cq''$  angebracht wären (§. 58.). Dasselbe gilt von den Kräften  $Q$  und  $Q'$ , weil diese (§. 62.) die Axe so drücken, als wenn  $Q$  nach  $Dq$  und  $Q'$  nach  $Cq'$  angebracht wäre. Die Kräfte  $Q$ ,  $Q'$  nach  $Cq'$ ,  $Cq''$  verursachen keinen Druck auf die Axe, weil sie einander gleich und entgegengesetzt sind, daher können solche abgenommen werden, und es bleibt noch in  $C$  der Druck  $P$  nach  $Cp$ , und in  $D$  der Druck  $Q$  nach  $Dq$ ; daher leidet eine feste Axe von den Kräften  $P$ ,  $Q$ , welche auf verschiedenen mit dieser Axe verbundenen Ebenen winkelrecht wirken und sich im Gleichgewichte halten, eben den Druck, als wenn diese Kräfte

Taf. II.  
Fig. 42.



in den Punkten C und D der Ase nach ihren Richtungen angebracht wären.

## §. 66.

Taf. II.  
Fig. 43.

**Aufgabe.** Die feste Ebene  $MN'$ , Figur 43., befinde sich an der Drehaxe  $MN$ , welche in  $M$  und  $N$  gehalten wird. Am Punkt  $G$  dieser Ebene wirke eine Kraft  $P$ , deren Richtung  $GP$  in diese Ebene fällt; man sucht den von der Kraft  $P$  herrührenden Druck auf die Punkte  $M$  und  $N$ .

**Auflösung.** Es sey der Winkel  $NMG = \alpha$ ,  $MNG = \beta$ , und der Winkel, unter welchem die verlängerte Richtung der Ase die Richtung der Kraft  $P$  schneidet, oder  $NCG = \gamma$ , so ist, wenn  $MG$  nach  $m$  verlängert wird, der Winkel  $nGg = \beta + \gamma$   
 $gGm = \alpha - \gamma$   
 $nGm = \alpha + \beta$

Nimmt man nun  $Gg = P$ , und zeichnet das Parallelogramm  $Gmgn$ , so ist §. 19.

$$Gm = \frac{P \cdot \sin nGg}{\sin nGm} = P \cdot \frac{\sin (\beta + \gamma)}{\sin (\alpha + \beta)} \text{ und}$$

$$Gn = \frac{P \sin gGm}{\sin nGm} = P \cdot \frac{\sin (\alpha - \gamma)}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Die Kraft  $Gm$  drückt den Punkt  $M$  nach  $MG$ ; wird sie daher nach  $MN$  und winkeltrecht darauf nach  $MM'$  zerlegt, und wird letzter Druck  $p'$  genannt, so erhält man §. 20.

$$p' = Gm \cdot \sin \alpha$$

und den Druck nach  $MN = Gm \cdot \cos \alpha$ .

Eben so kann man die auf den Punkt  $N$  nach  $GN$  wirkende Kraft  $Gn$ , nach  $MN$  und darauf win-

telrecht, nach der Richtung  $N'N$  zerlegen, wird letzterer Druck  $= p''$  gesetzt, so ist §. 20.

$$p'' = G_n \cdot \sin \beta$$

und der Druck nach  $MN = G_n \cdot \cos \beta$ .

Setzt man für  $G_m$  und  $G_n$  die gefundenen Werthe, so erhält man den Druck in  $M$  nach der auf die Ase winkelrechten Richtung  $M'M$  oder

$$(I) \quad p' = P \cdot \frac{\sin (\beta + \gamma) \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)},$$

den Druck auf den Punkt  $N$  nach der auf die Ase winkelrechten Richtung  $NN'$  oder

$$(II) \quad p'' = P \cdot \frac{\sin (\alpha - \gamma) \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

und wenn der gesammte Druck, welchen die Ase nach der Richtung  $MN$  leidet, also

$$G_m \cdot \cos \alpha + G_n \cdot \cos \beta = p'''$$

gesetzt wird, so erhält man

$$p''' = P \cdot \frac{\sin (\beta + \gamma) \cos \alpha + \sin (\alpha - \gamma) \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Es ist aber  $\sin (\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$  und  $\sin (\alpha - \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma$ , daher wenn man statt der Sinus von den Summen und Differenzen zweier Winkel die Sinus von den einzelnen Winkeln in diese Gleichung einführt, Zähler und Nenner mit  $\sin (\alpha + \beta)$  dividirt, und die Größen, welche sich aufheben, wegläßt, so erhält man

$$(III) \quad p''' = P \cos \gamma.$$

Diesen Werth hätte man ebenfalls erhalten, wenn man sich die Kraft  $P$  in  $C$  angebracht vorgestellt, und solche nach  $CN$  und winkelrecht auf  $CN$  zerlegt hätte.

## §. 67.

Kaf. II. 1. Zusatz. Läuft die Richtung der Kraft  $P$ , Fi-  
Fig. 43. gur 43., mit der Ase  $MN$  parallel, so wird  $\gamma = 0$ ,  
also  $\cos \gamma = \cos 0 = 1$ , daher ist

$$(I) \quad p' = P \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{P}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

Es sey  $GD$  auf  $MN$  winkelrecht, so ist

$$MD = GD \cot \alpha \text{ und}$$

$$DN = GD \cot \beta \text{ also}$$

$$MD + DN = MN = GD (\cot \alpha + \cot \beta) \text{ oder}$$

$$\frac{MN}{GD} = \cot \alpha + \cot \beta, \text{ folglich auch}$$

$$p' = \frac{GD}{MN} \cdot P.$$

Weil ferner  $p'' = P \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ , so wird

$$(II) \quad p'' = p' \text{ und}$$

$$(III) \quad p''' = P.$$

Je weiter daher bei einer Thüre die Stütz-  
haken von einander entfernt sind, desto geringer  
ist die Gewalt, mit welcher die Haken wagerecht  
gedrückt werden.

## §. 68.

Kaf. II. 2. Zusatz. Wäre daher an einer festen Stange  
Fig. 44.  $MN$ , Figur 44., ein Arm  $DG$  auf  $MN$  winkelrecht  
befestigt, und man giebt der Stange  $MN$  eine verti-  
kale Lage, indem die Kräfte  $P, p'''$  nach vertikalen Rich-  
tungen  $GP, Np'''$ , und die Kräfte  $p', p''$  nach wage-  
rechten Richtungen  $Mp', Np''$  angebracht werden, so  
ist unter den vier Kräften ein Gleichgewicht, und die  
Stange bleibt in Ruhe, wenn  $P = p'''$  und

$$p' = p'' = \frac{GD}{MN} P \text{ ist.}$$

Dieser Satz findet seine Anwendung bei den Stämpfern, weil sich nach demselben der Druck der Stämpfer gegen die Scheidelatten finden läßt.

§. 69.

In einer festen Ebene sind verschiedene Kräfte  $P, P', P'' \dots$ , welche nach verschiedenen Richtungen angebracht sind, mit einander im Gleichgewicht. Die ganze Ebene werde um einen in derselben willkürlich angenommenen Punkt  $O$ , Figur 45., äußerst wenig gedreht, so daß, wenn die Linie  $OA''$ , welche die Richtungen der Kräfte bestimmt, in die Lage  $Oa''$  kommt, der Bogen  $A''a''$ , welchen der äußerste Punkt  $A''$  durchläuft, so klein sey, daß solcher mit seiner Sehne als gleich groß angenommen werden kann. Sind nun  $A, A', A'' \dots$  die Punkte, wo die Richtungen der Kräfte  $P, P', P'' \dots$  die Linie  $OA''$  schneiden, wobei es gleichgültig ist, ob die Kräfte in den Punkten  $A, A' \dots$  oder in irgend einem Punkte ihrer Richtung wirken, und man setzt die Entfernungen  $OA, OA', OA'' \dots = b, b', b'' \dots$ , und die Richtungswinkel  $OAP, OA'P', OA''P'' \dots = \alpha, \alpha', \alpha'' \dots$  wo die Winkel von 0 bis 360 Grad fortgezählt werden; wird ferner  $ap, a'p' \dots$  mit  $AP, A'P' \dots$  parallel, und  $ad, a'd' \dots$  auf  $AP, A'P' \dots$  winkelrecht gezogen, so bezeichnet  $Ad$  den Weg, welchen die Kraft  $P$  nach ihrer Richtung durchlaufen muß, wenn die Linie  $OA$  in die Lage  $Oa$  kommt. Eben so sind  $A'd', A''d'' \dots$  die Wege, welche alsdann die Kräfte  $P', P'' \dots$  nach einerlei Richtung durchlaufen. Weil der Winkel  $A''Oa''$

Taf. II.  
Fig. 45.

Fig. 45. a.

unendlich klein ist, so sind  $OAa$ ,  $OA'a' \dots$  rechte Winkel, also

$$aAd = 90^\circ - \alpha$$

$$OA'P' = A'A'd' = A'a'd' = 360^\circ - \alpha' \text{ und}$$

$$A'a'd'' = 180^\circ - \alpha''.$$

Man setze die Wege

$$Ad = w, A'd' = w', A'd'' = w'', \text{ so ist, wenn}$$

$$Aa = v \text{ gesetzt wird}$$

$$A'a' = \frac{b'v}{b} \text{ und } A'a'' = \frac{b''v}{b}, \text{ also}$$

$$Ad = Aa \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \text{ oder } w = v \sin \alpha$$

$$A'd' = A'a' \cdot \sin(360^\circ - \alpha') \text{ oder } w' = -\frac{b'v}{b} \sin \alpha'$$

$$A'd'' = A'a'' \cdot \sin(180^\circ - \alpha'') \text{ oder } w'' = \frac{b''v}{b} \sin \alpha''.$$

Nach §. 29. III. ist aber für das Gleichgewicht unter den Kräften  $P, P', P''$

$$bP \sin \alpha + b'P' \sin \alpha' + b''P'' \sin \alpha'' = 0$$

oder wenn durchgängig mit  $\frac{v}{b}$  multipliziert wird

$$vP \sin \alpha + \frac{b'v \sin \alpha'}{b} P' + \frac{b''v \sin \alpha''}{b} P'' = 0$$

und wenn die vorhin gefundenen Werthe  $w, w', w''$  in diese Gleichung gesetzt werden, so erhält man

$$wP - w'P' + w''P'' = 0$$

oder weil bei mehreren Kräften  $P, P', P'' \dots$  die Rechnung auf gleiche Art geführt wird, und ähnliche Resultate entstehen, so erhält man ganz allgemein für jede Anzahl von Kräften

$$wP + w'P' + w''P'' + w'''P''' + \dots = 0$$

d. h. Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungen

in einerlei Ebene fallen, auf verschiedene Punkte eines Systems wirken und im Gleichgewichte sind, so muß bei einer geringen Umdrehung des ganzen Systems um einen willkürlich angenommenen Punkt, die algebraische Summe der Produkte einer jeden Kraft in den nach ihrer Richtung durchlaufenen Weg  $= 0$  seyn.

Hiebei ist aber wohl zu bemerken, daß die Wege, welche die Kräfte nach solchen Richtungen durchlaufen, welche ihnen grade entgegengesetzt sind, negativ in Rechnung kommen. Auch läßt sich leicht einsehen, daß das erwiesene Grundgesetz nicht nur für die Drehende, sondern auch für die fortschreitende Bewegung (§. 35.) gilt, bei welcher das ganze System eine solche Lage erhält, welche mit der vorhergehenden parallel ist; weil man nur den Drehpunkt unendlich weit entfernt annehmen darf.

Eben diese Resultate erhält man, wenn die Punkte  $A, A', A'' \dots$  nicht in einer graden Linie liegen. Fallen die Richtungen der Kräfte  $P, P', P'' \dots$  in mehrere mit einander parallele Ebenen, welche auf einer willkürlich angenommenen Drehaxe winkeltrecht stehen, so vertritt die Drehaxe die Stelle des angenommenen Punktes  $O$ , und man erhält dieselben Resultate. Auch läßt sich der angeführte Satz für mehrere Kräfte beweisen, deren Richtungen jede Lage haben mögen, weil man nur alsdann statt des Punktes  $O$  eine willkürliche Drehaxe annehmen, und jede von den Kräften  $P, P', P'' \dots$  nach §. 32. in drei auf einander win-

selbste Richtungen zerlegen darf, wovon eine mit der Drehaxe parallel, und die anderen durch die Drehaxe gehen. Der Beweis und die dazu gehörige Figur ist indessen so verwickelt, daß solcher um so mehr hier übergangen werden kann, weil diejenigen Fälle, wo die Richtungen der Kräfte nicht in einerlei oder mehrere parallele Ebenen fallen, hier nicht in Betrachtung gezogen werden.

Der oben erwiesene Satz kann daher als ein allgemeines Grundgesetz der Statik angesehen werden, weil er sich über alle Gegenstände derselben erstreckt, und die schwierigsten Aufgaben mit seiner Hülfe aufgelöst werden können. Auch ist dieser Satz unter dem Namen des Gesetzes vom Bestreben nach Bewegung, oder des Grundsatzes von der virtuellen Geschwindigkeit bekannt, wovon der Cartesische Grundsatz, nach welchem sich, im Falle des Gleichgewichts, die Kraft zur Last umgekehrt wie der Weg der Kraft zum Wege der Last verhält, als ein einzelner Fall leicht abgeleitet werden kann.

Umgekehrt kann man auf eine ganz ähnliche Art beweisen, daß, wenn bei einem Systeme die algebraische Summe der Produkte einer jeden Kraft in den nach ihrer Richtung durchlaufenen unendlich kleinen Weg  $= 0$  ist, sich alsdann das System im Gleichgewichte befindet.

§. 70.

**Zusatz.** Als ein Beispiel für die Anwendung des Grundgesetzes der Statik, kann hier folgende Aufgabe stehen: Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts

für die drei Kräfte  $P, Q, R$  finden, deren Richtungen in einer Ebene liegen und sich im Punkte  $M$  schneiden.

Man verlängere von den Richtungen  $MP, MQ, MR$ , Figur 45 b., die Richtung  $RM$  nach  $A$ , setze Kap. II. den Winkel  $AMP = \alpha$  und  $AMQ = \beta$ , so ist Fig. 45. b.

hierdurch die Lage aller drei Richtungen bestimmt. Erhält nun der Punkt  $M$  eine geringe Bewegung von  $M$  nach  $N$  unter dem willkürlichen Winkel  $AMN = \Phi$ , und man zieht aus  $N$  auf die Richtungen der Kräfte  $P, Q, R$ , winkelrecht  $NP', NQ', NR'$ , so ist  $MP'$  der Weg welchen die Kraft  $P$  ihrer Richtung entgegen, und  $MQ', MR'$  sind die Wege welche die Kräfte  $Q, R$  nach ihren Richtungen durchlaufen haben. Setzt man  $MP' = p, MQ' = q, MR' = r$  und  $MN = w$ , so erhält man

$$p = w \cos(180^\circ - \Phi - \alpha) = -w \cos(\Phi + \alpha)$$

$$q = w \cos(\Phi - \beta) \text{ und } r = w \cos(180^\circ - \Phi) = -w \cos \Phi.$$

Es ist aber nach dem Grundgesetz der Statik

$$0 = -pP + qQ + rR \text{ daher}$$

$$0 = wP \cos(\Phi + \alpha) + wQ \cos(\Phi - \beta) - wR \cos \Phi \text{ oder}$$

$$0 = P \cos(\Phi + \alpha) + Q \cos(\Phi - \beta) - R \cos \Phi.$$

In dieser Gleichung kann  $\Phi$  jeden willkürlich anzunehmenden Werth erhalten, wodurch man im Stande ist, für das Gleichgewicht, den Zusammenhang zwischen den Größen  $P, Q, R, \alpha, \beta$  auf sehr verschiedene Weise auszudrücken.



## Drittes Kapitel.

### Von dem eigenthümlichen Gewichte der Körper.

#### §. 71.

**G**leich große Körper von verschiedener Materie haben oft sehr verschiedene Gewichte, wodurch man auf die Verschiedenheit ihrer Massen schließt (§. 1.), weil doppelt so viel Masse einen doppelt so großen Druck auf ihre Unterlage verursacht, als die einfache. Wenn also ein Kubikfuß Eisen dreimal so viel wiegt, als ein Kubikfuß Kalkstein, so wird ersterer dreimal so viel Masse enthalten als letzterer. Je mehr Masse gleich große Körper enthalten, desto dichter sind sie, daher man überhaupt die Dichtigkeit (*Densitas*, *Densité*) eines Körpers nach der Masse, welche er in einem bestimmten Raume enthält, und die Masse nach ihrem Gewichte beurtheilt. Nehmen daher zwei Körper einerlei Raum ein, so verhalten sich ihre Dichtigkeiten wie ihre Massen oder wie ihre Gewichte.

Haben alle einzelne gleich große Theile eines Körpers einerlei Gewicht, so kann man der Materie desselben eine gleichförmige Dichtigkeit zuschreiben. Ist alsdann das Gewicht von einem bestimmten Theile eines Körpers, dessen Materie gleichförmig dicht oder homogen ist, bekannt, so läßt sich daraus auf das

## Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 93

Gewicht des ganzen Körpers schließen, weshalb es sehr wichtig ist, von mehreren vorkommenden Körpern, sofern deren Materie als homogen angenommen werden kann, die Gewichte zu kennen, weil sich daraus das Gewicht eines Körpers von jeder Gestalt leicht finden läßt. Die folgenden Untersuchungen finden daher auch nur in soweit ihre Anwendung, als man ohne Nachtheil die Materie der Körper als gleichförmig dicht annehmen kann.

### §. 72.

Sind die Materien zweier gleich großer Körper homogen, aber die Gewichte derselben verschieden, so sagt man, die Materie desjenigen Körpers, welcher das meiste Gewicht hat, besitzt mehr eigenthümliches (spezifisches) Gewicht, Eigengewicht (*Pondus specificum. Poids relatif*), als die Materie des andern Körpers. Zur Vergleichung der eigenthümlichen Gewichte mehrerer Materien darf man daher nur Körper von einerlei Größe, in Absicht ihrer Gewichte, mit einander vergleichen, und wenn man das Gewicht von einem derselben als Einheit annimmt, und alsdann ausmittelt, wie vielmals das Gewicht der übrigen Körper größer oder kleiner ist, als das Gewicht des zur Einheit angenommenen Körpers, so hat man dadurch ein bequemes Mittel, die eigenthümlichen Gewichte verschiedener Materien zu vergleichen. Damit aber das eigenthümliche Gewicht der Materie eines Körpers mit demjenigen nicht verwechselt werde, welches dem Körper von bestimmter Größe entspricht, so pflegt man le-

teres das absolute Gewicht (*Pondus absolutum. Poids absolu*) zu nennen.

Unter allen bekannten Materien hat das reine Regenwasser oder destillirtes Wasser, in Absicht der gleichförmigen Dichtigkeit den Vorzug, und weil es überdies sehr leicht zu haben ist, sich auch noch aus andern, erst in der Hydrostatik einleuchtenden Gründen, empfiehlt, so hat man allgemein das Gewicht des destillirten Wassers als Einheit, zur Vergleichung mit den Gewichten anderer Körper angenommen. Ist daher das Gewicht von einem Kubikfuße destillirten Wassers bekannt, und man findet das Gewicht von einem Kubikfuße Feldstein zwei und ein halbmal so groß, so ist, wenn das Eigengewicht des destillirten Wassers  $= 1$  gesetzt wird, das eigenthümliche Gewicht des Feldsteins  $= 2,5$ . Es sey  $\gamma$  das Gewicht von einem Kubikfuße destillirten Wassers, und  $G$  das Gewicht von einem Kubikfuße irgend einer andern Materie, so erhält man, wenn  $g$  das eigenthümliche Gewicht dieser Materie bezeichnet, ganz allgemein

$$g = \frac{G}{\gamma}.$$

§. 73.

Die genaue Ausmittlung von dem Gewichte des destillirten Wassers ist deshalb sehr nothwendig, weil hiervon die richtige Bestimmung des eigenthümlichen Gewichtes der übrigen Materien abhängt. Nach der Maas- und Gewichtordnung für die preussischen Staaten vom 16. Mai 1816, ist zur Bestimmung der

## Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 85

Größe eines preussischen Pfundes festgesetzt, daß ein preussischer Kubikfuß destillirten Wassers, im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 15 Grad des reaumurschen Quecksilberthermometers, genau 66 preussische Pfund wiegen soll, wenn der preussische Fuß = 139,13 pariser Linien, also 0,3137945965 Meter enthält, daher ist ein preussisches Pfund = 467,711012733 Grammen. Man sehe hierüber meine Abhandlung über die Prüfung der Normalmaasse und Gewichte in den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, vom Jahre 1825.

Um zu übersehen, wie sich das Gewicht des Wassers für verschiedene Wärmegrade ändert, so ist zu bemerken, daß wenn für 15 Grad das Gewicht 66 Pfund beträgt, alsdann bei 0 Grad dieses Gewicht 66,08 Pfund, und bei 20 Grad 65,91 Pfund wird. Man sehe hierüber das neunte Kapitel meiner Hydrostatik, Berlin 1826. Da sich nun alle erwärmten Körper gewöhnlich ausdehnen, und dadurch ein geringeres Eigengewicht erhalten als die kältern, so ist bei genauen Untersuchungen über das Eigengewicht der Körper, die Angabe der Temperatur nothwendig. Hier wird jedesmal für das eigenthümliche Gewicht der Körper, eine mittlere Temperatur von 15 reaumurschen Graden vorausgesetzt werden, und wenn lediglich von Fuß oder Pfund die Rede ist, preussisches Maaß und Gewicht verstanden.

## §. 74.

Bezeichnet man allgemein durch

$\gamma$  das Gewicht eines Kubikfußes destillirten Wassers = 66 Pfund;

$P$  das absolute Gewicht eines Körpers in Pfunden ausgedrückt;

$V$  den Inhalt dieses Körpers in Kubikfuß;

$G$  das Gewicht von einem Kubikfuß dieses Körpers, und durch

$g$  das eigenthümliche Gewicht von der Materie desselben;

so erhält man nach §. 72. das Gewicht von einem Kubikfuß, oder

$$(I) \quad G = g\gamma.$$

Es verhält sich aber

$$1 : V = G : P$$

Daher findet man das absolute Gewicht eines Körpers

$$(II) \quad P = G V = g\gamma V$$

hieraus den körperlichen Inhalt oder

$$(III) \quad V = \frac{P}{G} = \frac{P}{g\gamma}$$

und sein eigenthümliches Gewicht

$$(IV) \quad g = \frac{P}{\gamma V} = \frac{G}{\gamma}.$$

Auch erhält man noch

$$(V) \quad G = \frac{P}{V}.$$

1. Beispiel. Wieviel wiegt eine cylindrische Säule von Sandstein, deren Durchmesser 3, und Höhe 30 Fuß beträgt, wenn das eigenthümliche Gewicht des Sandsteins = 1,97 ist?

## Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 97

Hier wird  $g = 1,97$  und der Inhalt

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 30 = 211,95 \text{ Kubikfuß;}$$

daher ist nach (II) das Gewicht dieser Säule oder

$$P = 1,97 \cdot 66 \cdot 211,95 = 27557,7 \text{ preuß. Pfund.}$$

2. Beispiel. Man soll den Inhalt eines aus gegossenem Eisen gefertigten Körpers finden, welcher 372,7 Pfund wiegt, wenn das eigenthümliche Gewicht des gegossenen Eisens  $= 7,113$  ist.

$P = 372,7$  und  $g = 7,113$ , daher findet man (III) den Inhalt

$$V = \frac{372,7}{7,113 \cdot 66}$$

$$\text{Aber } \log 7,113 = 0,8520528$$

$$\log 66 = 1,8195439$$

---


$$2,6715967$$

$$\log 372,7 = 2,5713594$$

---


$$0,8997627 - 1 = \log 0,7939$$

daher ist der Inhalt des eisernen Körpers  $= 0,7939$  preussische Kubikfuß.

### §. 75.

Die nachstehende Tafel enthält die Angaben von dem eigenthümlichen Gewichte mehrerer Materien, wobei besonders auf die bei uns üblichen Baukörper Rücksicht genommen ist. Die angegebenen Verhältnißzahlen können aber nur als Näherungs- oder Mittelwerthe angesehen werden, weil selbst bei Materien von einer Art ihre mannichfaltige Dichtigkeit öfters sehr abweichende Resultate finden läßt. Auch muß bei Körpern von gemischter Materie, wie z. B. beim Mauerwerke, wo die Steine ein anderes Eigengewicht als

der Mörtel haben, die Angabe des eigenthümlichen Gewichtes so verstanden werden, als wenn die verschiedenen Materien einen gleichförmig dichten Körper bildeten. Ueberhaupt müssen die jedesmaligen Umstände, unter welchen von diesen Voraussetzungen Gebrauch gemacht wird, entscheiden, wie weit solche zulässig sind.

Außer einigen neuern, hat man besonders die Musschenbröckchen und Brissonschen Angaben von dem eigenthümlichen Gewichte der Körper benutzt, dagegen gründet sich die Bestimmung der bei uns einheimischen Holzarten und Baukörper größtentheils auf eigene deshalb angestellte Untersuchungen.

# T a f e l

zur Vergleichung des eigenthümlichen Gewichtes mehrerer Materien, wenn das Gewicht des destillirten Wassers als Einheit angenommen wird.

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Abricosenbaumholz, vom Stamme, trocken	0,711 bis 0,868
Accacienholz, vom Stamme, trocken .	0,650 — 0,702
Agalmatolith, chinesischer; Speckstein .	2,785 — 2,815
Agath . . . . .	2,553 — 2,667
Ahornholz, gemeines, vom Stamme, trocken	0,755
virginisches . . . . .	0,629
Alabaster . . . . .	2,611 — 2,876
weißer antiker . . . . .	2,730
Alaun . . . . .	1,714
Alaunerde . . . . .	1,750
Alaunschiefer, gemeiner . . . . .	1,805 — 2,490
Alaunstein . . . . .	1,378 — 2,424
Ambra, grauer . . . . .	0,926
schwärzlicher . . . . .	0,780
Ambrageist . . . . .	1,031
Ambradöl . . . . .	0,978
Ameisensäure . . . . .	0,994
Ametist . . . . .	2,653 — 2,785
Ammoniakgummi . . . . .	1,207
Apatit, blättriger (Phosphorpath) . .	3,119 — 3,218
Apfelbaumholz, vom Stamme, trocken	0,793
Apfelwein, Cyder . . . . .	1,018
Aquamarin, s. Berill.	
Arad, . . . . .	1,457



Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Arsenit, geschmolzen . . . . .	5,763
weißer, gemeiner . . . . .	3,594
gelber . . . . .	3,452
Asbest, biegsamer . . . . .	0,908 bis 2,313
gemeiner . . . . .	2,500 — 2,800
schwimmender . . . . .	0,680 — 0,993
Asphalt, Zudenpech . . . . .	1,104
Augit, (Olivinblende) . . . . .	3,182 — 3,377
Austerschaalen . . . . .	2,092
Basalt . . . . .	2,014 — 3,310
Baumöl . . . . .	0,915
Benzoeharz . . . . .	1,092
Bergblau . . . . .	3,608
Bergkry stall : . . . . .	2,605 — 2,888
Bergmehl, Silex mont. Farina . . . . .	0,362
Berill, Aquamarin . . . . .	2,250 — 2,759
Bernstein . . . . .	1,078 — 1,086
Bier, braunes . . . . .	1,034
weißes . . . . .	1,023
Bimsstein . . . . .	0,914
Birkenholz, vom Stamme, frisch . . . . .	0,702
trocken . . . . .	0,580
Birnbaumholz, vom Stamme, trocken . . . . .	0,661
Blasenstein, von Menschen . . . . .	1,700
Blei, gegossen, englisches . . . . .	11,324 — 11,875
deutsches . . . . .	11,310
Bleiasche . . . . .	1,666
Bleiglanz, würflicher . . . . .	7,587
Bleikalk . . . . .	8,940
Bleiweiß . . . . .	3,156

# Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 101

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Bleizucker . . . . .	2,745
Blutstein . . . . .	4,360
Blutwasser . . . . .	1,190
Bohnenbaum . . . . .	0,920
Bolus, armenischer . . . . .	2,727
Borax . . . . .	1,720
Borazit, Boraxspath . . . . .	2,076 bis 2,566
Brandwein, gemeiner . . . . .	0,837
Brasilienholz, rothes . . . . .	1,031
Braunstein . . . . .	3,530 — 4,116
Braunsteinkiesel . . . . .	3,600
Buchenholz (Rothbuchen)	
vom Stamme, trocken	0,666 — 0,854
vom Splint, trocken .	0,600 — 0,721
Buchenholzöl . . . . .	0,918
Buchsbauholz,	
brasilianisches, rothes, trocken	1,031
französisches . . . . .	0,910
holländisches . . . . .	1,328
Butter . . . . .	0,943
Cacaobutter . . . . .	0,892
Campedenholz, trocken . . . . .	0,913
Campfer . . . . .	0,989
Canariensect . . . . .	1,033
Cedernbaumholz, aus Indien, trocken	1,315
aus Palästina . . . . .	0,418 — 0,778
wildes . . . . .	0,596
Chinawurzel . . . . .	1,071
Chrysolit . . . . .	2,692 — 2,782
Citronenbaumholz, trocken . . . . .	0,726

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Cocosnußbaumholz, trocken . . . . .	1,040
Copal, durchsichtiger . . . . .	1,045
undurchsichtiger . . . . .	1,140
Corallen, rothe . . . . .	2,689
weiße . . . . .	2,500
Cyanit (blauer Schörl) . . . . .	3,092 bis 3,622
Cyber, f. Apfelwein.	
Cypressenbaumholz, spanisches, trocken .	0,644
Dachschiefer . . . . .	2,670 — 3,500
Demant, blauer, orientalischer . . . . .	3,525
gelber, brasilianischer . . . . .	3,666
grüner . . . . .	3,524
orangerother . . . . .	3,550
rosenrother . . . . .	3,531
weißer . . . . .	3,521
Demantspath . . . . .	3,710 — 3,962
Dillendöl . . . . .	0,994
Drachenblut (Harz) . . . . .	1,204
Ebenholz, von den Alpen, trocken . . . .	1,054
amerikanisches . . . . .	1,331
indianisches . . . . .	1,209
Ebeltanne, f. Weißtanne.	
Eichenholz,	
Sommereichen, vom Kern, trocken	0,720 — 0,795
Kern u. Splint, trocken	0,618 — 0,695
Splint, trocken . . . . .	0,610
Stamm, frisch . . . . .	0,845 — 0,850
Wurzel, frisch . . . . .	0,880
Zweige, frisch . . . . .	0,698 — 0,780
Wintereichen, f. Steineichen.	

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Eis . . . . .	0,916
Eisen, gegossen . . . . .	7,113 bis 7,230
geschmiedet, brandenb. Landeisen	8,189
harzer . . . . .	8,291
schwedisches . . . . .	8,341
süßler . . . . .	8,215
Eisenglanz . . . . .	5,218
Eisentiesel, krystallisirter Pechstein . . .	2,476 — 3,205
Eisenschlacke . . . . .	2,855
Elastisches Harz . . . . .	0,933
Elfenbein . . . . .	1,825
Elzbeerholz, trocken . . . . .	0,879
Enzianwurzel . . . . .	0,800
Epheubarz . . . . .	1,295
Erde, lehmigte, festgestampft, frisch . .	2,063
trocken . . . . .	1,929
feste Gartenerde, frisch . . . . .	2,047
trocken . . . . .	1,630
trockne magere Erde . . . . .	1,338
Erlenholz, vom Stamme, trocken . . . .	0,586 — 0,660
vom Splint, trocken . . . . .	0,485 — 0,574
vom Stamme, frisch . . . . .	0,788 — 0,800
Eichenholz, vom Stamme, trocken . . . .	0,725 — 0,845
vom Zweige . . . . .	0,734
Eltermilch . . . . .	1,035
Essig, destillirter . . . . .	1,009
rother . . . . .	1,025
weißer . . . . .	1,013
Essigsäure, concentrirte . . . . .	1,063
Feigenbaum . . . . .	0,690

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Feldspat; gemeiner . . . . .	2,430 bis 2,600
dichter (Feldstein) . . . . .	2,609 — 3,389
gläser . . . . .	2,518 — 2,589
Feuerstein (gemeiner Kiesel) . . . . .	2,581 — 2,700
Fichtenholz, f. Rothtanne.	
Fiebereinde . . . . .	0,780
Flußspath . . . . .	3,094 — 3,191
Fohre, f. Kiefer.	
Franzosenholz . . . . .	1,333
Fraueneis, f. Gypsath.	
Galläpfel . . . . .	1,034
Galmei . . . . .	3,380 — 3,524
Gasarten, bei 10 Grad Reaumur,	
kohlenfaures Gas . . . . .	0,0018478
nitrofes Gas . . . . .	0,0014640
Sauerstoffgas . . . . .	0,0013579
Stickgas . . . . .	0,0011905
Wasserstoffgas . . . . .	0,0000948
Glas, von Bouteillen . . . . .	2,732 — 2,890
Fensterglas, gemeines . . . . .	2,642 — 2,714
Flintglas . . . . .	3,329
Kryftallglas . . . . .	2,488 — 2,892
Glaslopf, rother . . . . .	4,898
Glimmer . . . . .	2,654 — 2,934
Gneis . . . . .	2,630 — 2,710
Gold, das reinste, gegoffen . . . . .	19,258
gefchlagen . . . . .	19,362
Ducatengold, holländifches . . . . .	19,352
franzöfifch. zu 22 Karat, gegoffen . . . . .	17,486
gefchlagen . . . . .	17,589

# Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 105

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Gold, guineisches . . . . .	18,888
von englischen Guineen . . . .	17,629
Granat, edler (Karfunkel) . . . .	3,718 bis 4,352
gemeiner . . . . .	3,668 — 3,757
Granatenbaumholz . . . . .	1,354
Granit, gemeiner . . . . .	2,539 — 3,063
ägyptischer . . . . .	2,654
Grappwurzel . . . . .	0,765
Guajakgummi . . . . .	1,229
Guajakholz . . . . .	1,632
Gummi, arabisches . . . . .	1,452
Gummigutta . . . . .	1,222
Gummilack . . . . .	1,139
Gummisandarac . . . . .	1,092
Gummitragant . . . . .	1,333
Gyps, dichter . . . . .	1,872 — 2,964
faserigter . . . . .	2,300
körniger . . . . .	2,199 — 2,310
sperenberger . . . . .	2,199 — 2,266
gebrannter, sperenberger . . . .	1,810
frisch gegossener, sperenberger .	1,292
gegossener, ausgetrocknet . . . .	0,973
Gypsopath, Fraueneis . . . . .	1,761 — 2,322
halbdurchsicht. sperenberger . .	1,761 — 2,322
Hammeltalg . . . . .	0,924
Hanffaamenöl . . . . .	0,926
Harn, vom Menschen . . . . .	1,011
Haselnußholz . . . . .	0,600
Haselnußöl . . . . .	0,916
Haselstaudenholz . . . . .	0,600

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Gausenblase . . . . .	1,111
Heliotrop (grüner Jaspis) . . . .	2,620 bis 2,700
Hirschhorn . . . . .	1,875
Hirschborngest . . . . .	1,073
Hirschhornsalz, flüchtiges . . . .	1,496
Hollunderholz . . . . .	0,695 — 0,730
Holzkohle . . . . .	0,280 — 0,442
Holzstein, versteinertes Holz, Kieselholz	2,045 — 2,675
Honig . . . . .	1,450
Honiggeist . . . . .	0,895
Hornbaum (Weißbuche) v. Stamm, trocken	0,755 — 0,805
Hornblende . . . . .	2,922 — 3,410
Hornblendschiefer . . . . .	2,909 — 3,153
Hornschiefer, s. Klingstein.	
Hornstein (Felskiesel) . . . . .	2,532 — 2,745
Hünereyer . . . . .	1,090
Hyacinth . . . . .	3,687 — 4,385
Jalappharz . . . . .	1,218
Jasminholz . . . . .	0,770
Jaspis, ägyptischer . . . . .	2,564 — 2,600
gemeiner . . . . .	2,580 — 2,700
Indigo . . . . .	0,769
Isoppöl . . . . .	0,968
Judenpech, s. Asphalt.	
Kalbstatg . . . . .	0,934
Kalkmörtel, frisch . . . . .	1,789
trocken . . . . .	1,638
Kalksinter, Tropfstein . . . . .	2,325 — 2,741
Kalkspath . . . . .	2,070 — 2,720
Kalkstein, dichter . . . . .	2,200 — 2,700

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Kalkstein, dichter, rüdersdorfer . . . .	2,396
körniger . . . . .	2,707 bis 2,862
gebrannter, rüdersdorfer . . . .	1,274
Kalzedon (Onyx) . . . . .	2,586 — 2,665
Karneol . . . . .	2,597 — 2,630
Kastanienbaum, Roskastanie . . . .	0,610
Katzenauge, Silex Catophtalin . . . .	2,567 — 3,259
Kiefernholz, vom Kerne, frisch, harzig	0,725 — 0,728
Kern und Splint, frisch . . . .	0,640 — 0,657
, vom Kerne, trocken . . . .	0,625
Kern und Splint, trocken	0,600
Splint, trocken . . . . .	0,440 — 0,570
Kiefelschiefer (Hornschiefer) . . . .	2,596 — 2,860
Kiefelsinter (Quarzsinter) <sup>1</sup> / <sub>2</sub> . . . .	1,807 — 1,917
Kirschbaumholz . . . . .	0,715
Kirschgummi . . . . .	1,482
Klingstein, Hornschiefer . . . . .	2,512 — 2,700
Kobalt, geschmolzen . . . . .	7,812
Kochsalz, reines . . . . .	1,918
Korkholz . . . . .	0,240
Korund (Demantspath) . . . . .	3,775 — 3,959
Krausenünzenöl . . . . .	0,975
Krebsaugen . . . . .	1,890
Kröte, schwarze, Zeichenschiefer . . . .	2,144 — 2,277
weiße . . . . .	1,797 — 2,790
Kreuzstein, Kreuzkry stall . . . . .	2,353 — 2,361
Krisoberill . . . . .	3,698 — 4,000
Krisolith (gelbgrüner Topas) . . . .	3,052 — 3,449
Krisopras . . . . .	2,479 — 3,250
Kry stall, isländischer . . . . .	2,720



Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Ruhmilch . . . . .	1,032
Kupfer, geschmolzen . . . . .	7,788
japanisches . . . . .	9,000
schwedisches . . . . .	8,784
Kupferdrath . . . . .	8,878
Kupfererz, Kies . . . . .	4,315
Labradorstein . . . . .	2,714 bis 2,751
Lasurstein . . . . .	2,771 — 2,945
Lava . . . . .	2,348 — 2,880
Lavendelöl . . . . .	0,894
Lebensbaumholz . . . . .	1,220 — 1,327
Leimen (Lehm) fetter, frisch . . . . .	1,664
erhärtet . . . . .	1,516
mit Stroh vermischt, wie er zum Auswinden der Staken gebraucht wird, frisch . . . . .	1,192
trocken . . . . .	1,072
Leinöl . . . . .	0,940
Lerchenbaumholz . . . . .	0,622
Leucit (weißer Granat) . . . . .	2,455 — 2,490
Limonienbaumholz . . . . .	0,703
Lindenholz . . . . .	0,604
Lorbeerbaumholz . . . . .	0,524 — 0,822
Luft, atmosphärische, bei 10° Reaumur	0,0012323
Lydischer Stein (Probirstein, schwarzer Jaspis) . . . . .	2,596 — 2,887
Magnetstein, indianischer . . . . .	4,244
Mahagoniholz . . . . .	0,637 — 1,063
Malachit . . . . .	3,670 — 4,000
Mandelbaumholz . . . . .	1,102

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Mandelöl, süß . . . . .	0,917
Mandelstein . . . . .	2,231 bis 2,594
Mangan . . . . .	7,000
Marmor, bayreuther . . . . .	2,840
carrarischer, weißer . . . . .	2,717 — 2,763
egyptischer, grüner . . . . .	2,668
vom Harz, blankenburger . . . . .	2,675
elbingeroder . . . . .	2,851
italianischer, schwarzer . . . . .	2,712
weiß . . . . .	2,715
von Paros, weißer . . . . .	2,837
von Carrara, weißer . . . . .	2,717
schlesischer, Jaspermarmor . . . . .	2,739
schlesischer, blauer . . . . .	2,711
grüner . . . . .	2,700
weiß . . . . .	2,648
schwedischer, grüner . . . . .	2,725
Rastirbaumholz . . . . .	0,849
Rastirgummi . . . . .	1,074
Rauer mit Kalkmörtel . . . . .	
von rüdersd. Bruchsteinen, frisch . . . . .	2,461
trocken . . . . .	2,396
von magdeb. Sandsteinen, frisch . . . . .	2,123
trocken . . . . .	2,047
von Ziegelsteinen, frisch . . . . .	1,554 — 1,699
trocken . . . . .	1,471 — 1,593
Raulbeerbaumholz . . . . .	0,626 — 0,897
Reerschäum . . . . .	0,336 — 1,600
Reerwasser . . . . .	1,026
Melanit (schwarzer Granat) . . . . .	3,691

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Menschenblut . . . . .	1,040
Mergel, erdiger . . . . .	1,606 bis 2,400
erhärteter . . . . .	2,300 — 2,700
Messing, gegossen . . . . .	8,396
Messingdrath . . . . .	8,544
Mispelbaumholz . . . . .	0,944
Mohnöl . . . . .	0,924
Mohnsaft, türkischer . . . . .	1,363
Mühlenstein . . . . .	2,490
Myrrhe . . . . .	1,360
Naphta . . . . .	0,847
Nellendöl . . . . .	1,036
Nickel, gemeiner . . . . .	6,648
geschmolzen . . . . .	7,807
Nußbaumholz, deutsches . . . . .	0,664
französisches . . . . .	0,671
virginisches, schwarzes . . . . .	0,827
Nußöl . . . . .	0,923
Obsidian (Glasachaf) . . . . .	2,348
Ochsenhorn . . . . .	1,840
Ochsentalg . . . . .	0,923
Olivenbaumholz . . . . .	0,927
Olivin (grüner Schörl) . . . . .	3,032 — 3,403
Opal, edler, orientalischer . . . . .	1,700 — 2,114
gemeiner . . . . .	2,015 — 2,144
Opium . . . . .	1,336
Palladium, gehämmert . . . . .	12,148
geschmolzen . . . . .	11,300 — 11,800
Pappelbaumholz, Schwarzpappel, trocken . . . . .	0,383 — 0,557
Weißpappel, trocken . . . . .	0,529 — 0,810

# Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 111

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Pappelbaumholz, carolinisches . . . . .	0,419
italianisches . . . . .	0,398
Paradiesholz . . . . .	1,177
Pech . . . . .	1,150
Pechstein . . . . .	2,049 bis 2,669
Perlen, orientalische . . . . .	2,684
Pfeifenstrauchholz . . . . .	1,099
Pferdemilch . . . . .	1,035
Pfirfichbaumholz . . . . .	0,749
Pflaumenbaumholz . . . . .	0,785 — 0,790
Phosphor . . . . .	1,714
Phosphorsäure . . . . .	1,558
Platina, gereinigt und gewalzt . . . . .	22,069
geprägt . . . . .	21,343
gehämmert . . . . .	20,337 — 21,314
gegossen . . . . .	19,500 — 20,855
Drath . . . . .	19,267
Pommeranzenbaumholz . . . . .	0,705
Pommeranzenöl . . . . .	0,888
Pontal . . . . .	0,993
Porphyr . . . . .	2,395 — 2,793
Porzellan, chinesisches . . . . .	2,385
französisches . . . . .	2,146
sächsisches . . . . .	2,493
Porzellanerde . . . . .	2,230 — 2,400
Prasem (Praser) . . . . .	2,580
Prehnit (grüner Feldspath) . . . . .	2,942
Puzzolane . . . . .	2,510 — 2,800
Quarz, gemeiner . . . . .	2,486 — 2,763
milchweißer . . . . .	2,652

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Quecksilber, fest gefrorenes . . . . .	14,391 bis 15,632
deutsches . . . . .	14,000
englisches . . . . .	13,593
Quecksilberfals . . . . .	9,230
Quittenbaumholz . . . . .	0,705
Regenwasser, ganz reines . . . . .	1,000
Reisblei, deutsches . . . . .	2,460
englisches . . . . .	2,089
Rohr, spanisches . . . . .	0,400
Rosenholz . . . . .	1,125
Rosmarinöl . . . . .	0,934
Rothbuchenholz, f. Buchen.	
Rothstein . . . . .	1,666 — 3,139
Rothtannenholz, Fichten, frisch . . . . .	0,546
trocken . . . . .	0,360 — 0,498
Rubin . . . . .	4,166 — 4,283
Rübsaamenöl . . . . .	0,853 — 0,919
Sadebaumöl . . . . .	0,986
Salmiak, reiner . . . . .	1,420
Salpeter . . . . .	1,900
feuerbeständiger . . . . .	2,745
Salpetersäure, gemeine . . . . .	1,272
rauchende . . . . .	1,583
Salzsäure . . . . .	1,194
Sand, gemeiner, trocken . . . . .	1,638
aus Bächen . . . . .	1,900
mit Wasser gesättigt . . . . .	1,945
Sandelholz, gelbes . . . . .	0,809
rothes . . . . .	1,128
weißes . . . . .	1,041

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Sandstein . . . . .	1,933 bis 2,699
magdeburger . . . . .	1,971 — 2,123
Saphir, orientalischer . . . . .	4,290 — 4,830
brasilianischer . . . . .	3,130
Sardonix . . . . .	2,595 — 2,628
Sassafrasholz, trocken . . . . .	0,482
Sassafrasöl . . . . .	1,094
Scamonienharz . . . . .	1,200
Schaaßmilch . . . . .	1,041
Schiefertthon . . . . .	2,600 — 2,680
Schießpulver, gehäuft . . . . .	1,868
Schlebensaft . . . . .	1,515
Schmergel . . . . .	3,922
Schörl, gemeiner (schwarzer) . . . . .	2,920 — 3,212
elektrischer, s. Turmalin.	
Schwefel, geschmolzener . . . . .	1,991
natürlicher . . . . .	2,033
Schwefelkies . . . . .	3,440 — 4,954
Schwefelnaphtha . . . . .	0,716
Schwefelsäure . . . . .	1,700 — 1,877
Schweinefett . . . . .	0,937
Schwerspath, gemeiner . . . . .	4,342 — 4,760
dichter . . . . .	4,300 — 4,400
faseriger . . . . .	4,440 — 4,496
körniger . . . . .	4,380
Serpentinstei, gemeiner . . . . .	2,560 — 2,894
Silber, 16 löthiges, geschlagen . . . . .	10,511
geschmolzen . . . . .	10,474
Silberglasserz . . . . .	6,910
Silberbornerz . . . . .	4,749

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Silbertanne, f. Weißtanne.	
Smaragd . . . . .	2,678 bis 2,775
Spec . . . . .	0,948
Specstein, gemeiner . . . . .	2,614 — 2,880
Spießöl . . . . .	0,936
Spinell (Rubinspath) . . . . .	3,454 — 3,914
Spießglas, geschmolzen . . . . .	6,702
rohes . . . . .	4,064
Spießglasöl . . . . .	2,470
Spießglaskinctur . . . . .	0,866
Stahl, geschlagen . . . . .	7,840
ungeschlagen . . . . .	7,833
Pölmischer . . . . .	8,215
Federstahl . . . . .	8,215
von englischen Feilen . . . . .	8,189
Gußstahl . . . . .	7,919
Stangenstein (weißer Schörl) . . . . .	3,530
Stechpalme . . . . .	0,760
Steineichenholz, vom Stamme, frisch . . . . .	0,990 — 1,100
trocken . . . . .	0,724 — 0,760
von der Wurzel, frisch . . . . .	1,008 — 1,200
vom Zweige, frisch . . . . .	0,819 — 0,832
Steinkohle . . . . .	1,270 — 1,500
Steinmark, verhärtetes . . . . .	2,500 — 2,815
Steinöl . . . . .	0,878
Steinsalz . . . . .	2,143
Stinkstein . . . . .	2,699 — 2,712
Storargummi . . . . .	1,110
Strahlstein, Strahlschörl . . . . .	2,806 — 3,452
Stroh, so wie es in den Scheunen zusammengebunden ist . . . . .	0,053

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Stroh, zusammengepreßt . . . . .	0,125
Strontianit . . . . .	3,400 bis 3,675
Syenit . . . . .	2,635 — 2,710
Tacamaßharz . . . . .	1,139
Talg . . . . .	0,942
Talk, gemeiner (Talkstein) . . . . .	2,700 — 3,000
Talkschiefer . . . . .	2,768 — 3,020
Tannenharz . . . . .	1,073
Tannenholz, f. Weißtanne.	
Tarusbäumholz, holländisches . . . . .	0,788
spanisches . . . . .	0,807
Teufelsdreck . . . . .	1,327
Therpentin . . . . .	0,991
Therpentingeist . . . . .	0,874
Therpentinöl . . . . .	0,870
Thon, gemeiner, Töpfererde . . . . .	1,800 — 2,000
Thonerde, reine . . . . .	1,305 — 1,699
Thonschiefer, Dachschiefer . . . . .	2,670 — 3,500
Thran . . . . .	0,923
Thumerstein, Arinit (Glaschört) . . . . .	3,250 — 3,295
Thuyasbaumholz . . . . .	0,561
Tombaß . . . . .	9,185
Topaß, orientalischer . . . . .	4,011
sächsischer . . . . .	3,564
brasilianischer . . . . .	3,536
Trapp . . . . .	2,780 — 3,021
Tripel (Tripelerde) . . . . .	2,529
Tropfstein . . . . .	2,324 — 2,675
Türkis . . . . .	2,860 — 3,000
Tungstein . . . . .	6,066



Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Turmalin, elektrischer Schörl . . . . .	3,054 bis 3,470
Ulmenholz, vom Stamme, trocken . . . . .	0,600 — 0,742
Uranium . . . . .	6,440 — 7,000
Veronesererde, Grünerde . . . . .	2,637
Vesuvian (vulkanischer Schörl) . . . . .	3,365 — 4,000
Bitriol, bantziger . . . . .	1,715
englischer . . . . .	1,880
Bitriolsalz . . . . .	1,900
Bitriolsäure s. Schwefelsäure.	
Wacholderholz . . . . .	0,556
Wacholderöl . . . . .	0,911
Wachs, gelbes . . . . .	0,965
weißes . . . . .	0,969
Wachsöl . . . . .	0,831
Wade . . . . .	2,535 — 2,980
Wallrath . . . . .	0,943
Wallroßzahn . . . . .	1,933
Wasser, destillirtes . . . . .	1,000
Wasserblei . . . . .	4,738
Weibermilch . . . . .	1,020
Weidenholz . . . . .	0,390 — 0,585
Wein, Bordeaux . . . . .	0,994
Burgunder . . . . .	0,991
Champanger . . . . .	0,962
Raywein, rother . . . . .	1,018
weißer . . . . .	1,039
Madera . . . . .	1,038
Mallaga . . . . .	1,015 — 1,022
Moseler . . . . .	0,916
Pontal . . . . .	0,993

# Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper. 117

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Wein, Rheinwein . . . . .	0,999 bis 1,002
Eosayer . . . . .	1,054
Weingeist, gemeiner . . . . .	0,837
höchst rectificirter (Alkohol) . . . . .	0,729
Weinstein . . . . .	1,849
Weinsteingeist . . . . .	1,073
Weinsteinöl . . . . .	1,550
Weinsteinrahm . . . . .	1,900
Weinsteinfalz . . . . .	1,550
Weinstockholz . . . . .	1,327
Weißbuchenholz, f. Hornbaum. . . . .	
Weißdorn . . . . .	0,910
Weißtannenholz, vom Stamme, frisch . . . . .	0,444 — 0,453
trocken . . . . .	0,420 — 0,424
Weyrauch . . . . .	1,173
Weschiefer . . . . .	2,609 — 2,955
Wismuth, gediegen . . . . .	9,020
geschmolzen . . . . .	9,822
Wolfram . . . . .	7,119
Wundersalz, Glaubers . . . . .	2,246
Zeolith, straligter . . . . .	2,035 — 2,100
Ziegel, gebrannter . . . . .	1,410 — 2,215
Ziegenmilch . . . . .	1,034
Zimmetöl . . . . .	1,044
Zink, geschmolzen . . . . .	7,191 — 7,213
gehämmert . . . . .	7,861
Zinkblende . . . . .	4,166
Zinn, englisches, gegossen . . . . .	7,291
gehämmert . . . . .	7,299 — 7,306
Zinnober, braunrother . . . . .	10,218
hochrother . . . . .	6,902
Zirkon, dunkelblauer . . . . .	4,666
weißer . . . . .	4,307
Zucker, weißer . . . . .	1,606

Mehrere Untersuchungen über das Eigengewicht der Körper und die Ermittlung desselben, befinden sich im neunten Kapitel meiner Hydrostatik.

## Viertes Kapitel.

### Vom Schwerpunkte.

---

#### §. 76.

Wenn mehrere Gewichte an einer oder mehreren festen mit einander verbundenen Linien oder Ebenen angebracht sind, so nennt man denjenigen Punkt, welcher gehörig unterstützt werden muß, damit diese Gewichte in allen Lagen der Linien oder Ebenen im Gleichgewichte oder in Ruhe bleiben, den Schwerpunkt (*Centrum gravitatis. Centre de gravité*). In eben der Bedeutung versteht man unter dem Schwerpunkte eines schweren festen Körpers denjenigen Punkt, welcher vertikal unterstützt werden muß, wenn der Körper in allen Lagen in Ruhe bleiben soll.

Bei dem graden Hebel ist der Dreh- oder Ruhepunkt der Schwerpunkt, weil derselbe in allen Lagen im Gleichgewichte bleibt, wenn dieser Punkt gehörig unterstützt ist (§. 57.).

#### §. 77.

**Aufgabe.** An einer festen Ebene  $XY$ , Figur 46., wirken winkelrecht auf dieselbe in den Punkten  $A, A'$  zwei Gewichte  $P, P'$ , deren Lage durch die winkelrechten Abstände  $DA, D'A'$  von einer in dieser Ebene willkürlich gezogenen Momentanaxe  $BC$  gegeben sind;

Zaf. II.

Fig. 46.

man sucht den Abstand des Schwerpunkts von dieser Axe.

Auflösung. Man ziehe  $AA'$ ; nehme  $AG = \frac{AA' \cdot P'}{P + P'}$  so ist  $G$  der Schwerpunkt (§. 45.), und wenn dieser unterstützt wird, so bleiben beide Gewichte in allen Lagen in Ruhe.

Nun verhält sich

$$P' : P + P' = AG : AA'; \text{ aber auch}$$

$$AG : AA' = HG - AD : A'D' - AD \text{ also ist}$$

$(HG - AD)(P + P') = (A'D' - AD)P'$  folglich der gesuchte Abstand des Schwerpunktes der Gewichte  $P, P'$  oder

$$HG = \frac{AD \cdot P + A'D' \cdot P'}{P + P'}.$$

Der Punkt  $G$  wird seine Unterstützung in jeder Lage eben so stark drücken, als wenn die Gewichte  $P, P'$  darin vereinigt wären.

Wird noch ein drittes Gewicht  $P''$  in  $A''$  winkelrecht auf  $XY$  angebracht, so kann man die Gewichte  $P, P'$  in  $G$  anbringen, und ihre Wirkung auf diesen Punkt  $G$  bleibt dieselbe. Für das Gewicht  $(P + P')$  in  $G$ , und  $P''$  in  $A''$ , ist es nun leicht, nach der vorstehenden Regel den Abstand des Schwerpunkts  $G'$  zu finden, weil hier eben die Regel gelten muß, wie bei zwei Gewichten; es ist daher

$$H'G' = \frac{HG \cdot (P + P') + A''D'' \cdot P''}{(P + P') + P''}$$

oder wenn man für  $HG$  seinen Werth setzt

$$H'G' = \frac{AD \cdot P + A'D' \cdot P' + A''D'' \cdot P''}{P + P' + P''}$$

und es ist alsdann  $G'$  der gemeinschaftliche Schwerpunkt der drei Gewichte  $P, P', P''$ , welcher gehörig unterstützt diese Gewichte bei jeder Lage der Ebene in Ruhe erhält. Auch wird der Punkt  $G'$  so stark gedrückt, als wenn die Gewichte  $P, P', P''$  in ihm vereinigt wären.

Befährt man auf diese Art weiter, bei einem vierten, fünften u. Gewichte, so erhält man allgemein, wenn

$a, a', a'', a''', \dots$  die Abstände der Gewichte  $P, P', P'', P''', \dots$  von einer willkürlichen Linie  $BC$  sind, und  $x$  die Entfernung des Schwerpunkts von dieser Linie bezeichnet

$$x = \frac{aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' + \dots}{P + P' + P'' + P''' + \dots}$$

d. h. man findet die Entfernung des Schwerpunkts mehrerer in einer Ebene angebrachten Gewichte, von einer willkürlichen Linie, in dieser Ebene, wenn die Summe der Momente für diese Linie durch die Summe der Gewichte dividirt wird.

Hiedurch erhält man ein leichtes Mittel, den Schwerpunkt mehrerer an einer Ebene befindlichen Gewichte zu finden, weil man nur zwei sich schneidende Linien annehmen, und von diesen die Entfernung des Schwerpunkts bestimmen darf.

Kaf. II.  
Fig. 47.

Wären in der Ebene  $XY$ , Figur 47, in  $A, A', A''$  die Gewichte  $P = 40, P' = 50, P'' = 60$  Pfund angebracht, und die Lage der Punkte  $A, A', A''$  gegen die willkürlichen Linien  $BC$  und  $B'C'$  gegeben, so daß

$DA = 5, D'A' = 10, D''A'' = 6$  und

$EA = 11, E'A' = 8, E''A'' = 4$  ist, so erhält man für den Abstand des Schwerpunktes von  $BC$

$$\frac{5 \cdot 40 + 10 \cdot 50 + 6 \cdot 60}{40 + 50 + 60} = 7\frac{1}{3} \text{ Fuß}$$

und für den Abstand des Schwerpunktes von  $B'C'$

$$\frac{11 \cdot 40 + 8 \cdot 50 + 4 \cdot 60}{40 + 50 + 60} = 7\frac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nun auf  $BC$  winkelrecht,  $BH = 7\frac{1}{3}$  Fuß, und zieht  $HH'$  mit  $BC$  parallel, so muß in  $HH'$  der Schwerpunkt liegen. Eben so nehme man auf  $B'C'$  winkelrecht,  $B'K = 7\frac{1}{2}$  Fuß, ziehe  $KK'$  mit  $B'C'$  parallel, so muß der Schwerpunkt ebenfalls in  $KK'$  liegen; folglich ist im Durchschnitt  $G$  der gesuchte Schwerpunkt.

§. 78.

Wenn auf mehrere einzelne Punkte eines Systems, welche nicht in einerlei Ebene liegen, Kräfte wirken, deren Richtungen mit einander parallel sind, so läßt sich auch für diese Kräfte ein solcher Punkt angeben, welcher gehörig unterstützt das System in allen Lagen im Gleichgewichte erhält, sobald nur die Lage der angegriffenen Punkte unter sich selbst nicht geändert wird.

Wären  $D$  und  $D'$ , Figur 48., zwei Punkte, in welchen die Kräfte  $P, P'$  nach parallelen Richtungen wirken, so nehme man eine Ebene  $MN$  von willkürlicher Lage an, und ziehe auf diese Ebene winkelrecht die Linien  $DC, D'C'$ . In der Ebene  $MN$  ziehe man die willkürliche Linie  $AB'$ , und von den Punkten  $C, C'$  die auf  $AB'$  winkelrechte Linien  $CB, C'B'$ , so wird die Lage der Punkte  $D$  und  $D'$  durch die Linien

Taf. II.  
Fig. 48.

$AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $CD = z$  und  $AB' = x'$ ,  $B'C' = y'$ ,  $C'D' = z'$  bestimmt, wo alsdann A der gemeinschaftliche Anfangspunkt für die Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ist. Man ziehe  $CC'$  und  $DD'$ , so fällt der Schwerpunkt von  $P$ ,  $P'$  in die Linie  $DD'$ . Wäre  $g$  dieser Schwerpunkt, so ziehe man  $gf$  auf  $CC'$  und  $fe$  auf  $AB'$  winkelrecht, auch  $D'h$  mit  $CC'$  parallel, so wird sich  $D'h$  mit  $gf$  in  $k$  schneiden, und die Dreiecke  $DD'h$  und  $D'gk$  sind ähnlich. Alsdann verhält sich

$$Dh : gk = D'D : D'g. \text{ Aber auch §. 57.}$$

$$D'D : D'g = P + P' : P \quad \text{daher}$$

$$Dh : gk = P + P' : P \quad \text{folglich}$$

$$gk = \frac{Dh \cdot P}{P + P'} = \frac{(z - z')P}{P + P'}.$$

$$\text{Aber } gk = fg - fk = fg - z' \text{ also}$$

$$fg = \frac{(z - z')P}{P + P'} + z'$$

man findet daher

$$fg = \frac{zP + z'P'}{P + P'}.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke  $CC'l$  und  $C'fm$  verhält sich ferner

$$Cl : fm = C'C : C'f \quad \text{und auch}$$

$$C'C : C'f = D'D : D'g. \text{ Aber weil}$$

$$D'D : D'g = P + P' : P \quad \text{so folgt}$$

$$Cl : fm = P + P' : P \quad \text{daher ist}$$

$$fm = \frac{Cl \cdot P}{P + P'} = \frac{(y - y')P}{P + P'}.$$

$$\text{Aber } fm = ef - em = ef - y' \text{ also}$$

$$ef = \frac{(y - y')P}{P + P'} + y'$$

daher findet man

$$ef = \frac{yP + y'P'}{P + P'}.$$

Endlich verhält sich auch

$$C'l : C'm = Cl : fm. \text{ Aber weil}$$

$$Cl : fm = P + P' : P \text{ so folgt}$$

$$C'l : C'm = P + P' : P \text{ also}$$

$$C'm = \frac{C'l \cdot P}{P + P'} = \frac{(x' - x)P}{P + P'}.$$

$$\text{Aber } C'm = B'e = AB' - Ae = x' - Ae$$

also

$$x' - Ae = \frac{(x' - x)P}{P + P'} \text{ oder } Ae = x' - \frac{(x' - x)P}{P + P'}$$

daher ist

$$Ae = \frac{xP + x'P'}{P + P'}.$$

Aus den Werthen  $Ae$ ,  $ef$ ,  $fg$  läßt sich daher der Schwerpunkt  $g$  für jede zwei Kräfte, deren Richtungen parallel sind, bestimmen, wenn die erforderlichen Abstände derselben bekannt sind.

Wäre eine dritte Kraft  $P''$  vorhanden, deren Lage durch die auf einander winkelrechte Linien  $AB' = x'$ ,  $B'C' = y'$ ,  $C'D' = z'$  gegeben ist, so setze man  $P + P' = Q$ , so kann man statt der Kräfte  $P$ ,  $P'$  die Kraft  $Q$  in  $g$  anbringen. Alsdann erhält man, wenn  $g'$  der Schwerpunkt für die Kräfte  $P'$ ,  $Q$  ist, nach den gefundenen Ausdrücken für den Schwerpunkt zweier Kräfte:

$$Ae' = \frac{Ae \cdot Q + x''P''}{Q + P''}$$

$$e'f' = \frac{ef \cdot Q + y''P''}{Q + P''}$$

$$f'g' = \frac{fg \cdot Q + z''P''}{Q + P''}.$$



Es ist aber

$Q = P + P'$ ;  $Ae \cdot Q = Ae (P + P') = xP + x'P'$ ;  
 $ef \cdot Q = yP + y'P'$  und  $fg \cdot Q = zP + z'P'$ ; man  
 erhält daher zur Bestimmung der Lage des Schwer-  
 punkts für die drei Kräfte  $P$ ,  $P'$  und  $P''$  die Abstände

$$Ae' = \frac{xP + x'P' + x''P''}{P + P' + P''}$$

$$e'f' = \frac{yP + y'P' + y''P''}{P + P' + P''}$$

$$f'g' = \frac{zP + z'P' + z''P''}{P + P' + P''}.$$

Setzt man wieder  $P + P' + P'' = Q$ , so kann  
 man auf eine ähnliche Art den Schwerpunkt für vier  
 und mehrere Kräfte finden, und weil das Verfahren  
 immer dasselbe bleibt, so erhält man ganz allgemein,  
 wenn  $G$  der Schwerpunkt für irgend eine Anzahl pa-  
 ralleler Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$ , .... ist, und die wink-  
 rechten Abstände  $AE$ ,  $EF$ ,  $FG$  die Lage des Schwer-  
 punkts bezeichnen:

$$AE = \frac{xP + x'P' + x''P'' + x'''P''' + \dots}{P + P' + P'' + P''' + \dots}$$

$$EF = \frac{yP + y'P' + y''P'' + y'''P''' + \dots}{P + P' + P'' + P''' + \dots}$$

$$FG = \frac{zP + z'P' + z''P'' + z'''P''' + \dots}{P + P' + P'' + P''' + \dots}$$

Hätte man anstatt des Anfangspunkts  $A$  eine  
 auf  $AB'$  winkelrechte Ebene angenommen, welche durch  
 den Punkt  $A$  geht, so wären  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , .... die Ab-  
 stände der Punkte  $D$ ,  $D'$ ,  $D''$ , .... von dieser Ebene.  
 Um daher den Schwerpunkt von mehreren nicht  
 in einerlei Ebene befindlichen Kräften zu finden,

nähme man drei sich winkelrecht schneidende Ebenen an, und bestimme die Abstände der angegriffenen Punkte von diesen drei Ebenen. Für jede Ebene wird alsdann der Abstand des Schwerpunkts bestimmt, wenn man die Summe der Momente von dieser Ebene durch die Summe der Kräfte dividirt.

Weil dieser Satz für jede willkürlich angenommene Lage der drei auf einander winkelrechten Ebenen gilt, so muß er auch für jede Lage des Systems wahr seyn.

§. 79.

Die Materie eines jeden festen Körpers kann man sich so vorstellen, als wenn solche aus einzelnen sehr kleinen Theilen oder Gewichten bestehet, welche durch den Zusammenhang des Körpers mit einander verbunden sind, und für diese muß es eben so wohl, wie für jede andere Menge von Gewichten einen Schwerpunkt geben, welcher, wenn er unterstützt wird, den Körper in jeder Lage in Ruhe erhält, und in welchem man sich das ganze Gewicht des Körpers vereinigt vorstellen kann. Wird der Körper im Schwerpunkte oder in einer durch denselben gehenden festen Vertikallinie unterstützt, so leidet die Stütze einen Druck, welcher dem Gewichte des Körpers gleich ist, woraus folgt, daß ein Körper mit seinem ganzen Gewichte vereinigt in derjenigen Vertikallinie wirkt, welche durch den Schwerpunkt geht. Ist der Schwerpunkt nicht unterstützt, so muß der Körper fallen, und eben daher kann ein Kör-

per nicht zwei oder mehrere Schwerpunkte haben. Es hat daher jeder feste Körper einen Schwerpunkt, der zwar nicht immer, wie z. B. bei einem Ringe, in seiner Masse liegt, aber jederzeit, wenn er mit dem Körper in eine feste Verbindung gesetzt und unterstützt wird, den Körper in Ruhe erhält.

Jede grade Linie, welche durch den Schwerpunkt eines Körpers geht, heißt ein Durchmesser der Schwere (*Diameter gravitatis*), und da, wo sich zwei Durchmesser der Schwere schneiden, muß der Schwerpunkt liegen.

Eine Ebene, durch den Schwerpunkt gelegt, heißt eine Ebene der Schwere (*Planum gravitatis*). Die Durchschnittslinie von zwei Ebenen der Schwere giebt einen Durchmesser der Schwere.

In allen den Fällen, wo hier der Schwerpunkt eines Körpers gesucht wird, ist vorausgesetzt, daß dessen Materie von gleichförmiger Dichtigkeit sey; so wie man auch, wenn von einer schweren Fläche oder Linie die Rede ist, allemal voraussetzen muß, daß gleich große Theile derselben gleiches Gewicht haben. Hieraus läßt sich einsehen, wiefern es erlaubt ist, statt des Gewichts eines Körpers seinen Inhalt in Rechnung zu bringen, weil sich die Inhalte eben so wie die Gewichte verhalten. Dasselbe gilt von den Flächen und Linien. Wenn hingegen gleiche Theile eines Körpers nicht einerlei eigenthümliches Gewicht haben, dann verhalten sich die Inhalte nicht wie die Gewichte, und

man darf daher auch nicht jene statt dieser in Rechnung bringen.

§. 80.

Die schwere Linie  $BAC$ , Figur 49., werde durch eine grade Linie  $AD$  so geschnitten, daß wenn man  $BC$  auf  $AD$  winkelrecht zieht, die Fläche  $AMB$  genau auf  $AND$  paßt, so ist  $AD$  ein Durchmesser der Schwere für die Linie  $BAC$ , weil alle gleich große Theile dieser Linie gleiche winkelrechte Abstände von  $AD$  haben müssen. Aus ähnlichen Gründen liegt der Schwerpunkt einer graden Linie in ihrer Mitte.

Taf. II.  
Fig. 49.

Von einer jeden Fläche wie  $ABC$ , Figur 50., welche durch eine grade Linie  $AD$  so geschnitten werden kann, daß jede Parallellinie mit der Grundlinie  $BC$ , wie  $MN$ , in zwei gleich große Theile  $MQ = QN$  getheilt wird, ist die Linie  $AD$  ein Durchmesser der Schwere. Denn man nehme  $mn$  parallel mit  $BC$ , so daß der eingeschlossene Raum  $MmnN$  äußerst schmal ist, alsdann wird offenbar der Schwerpunkt dieses sehr schmalen Streifens in dem Durchschnitte liegen, wo  $AD$  denselben schneidet. Weil dieses nun von jedem mit  $BC$  parallelen Streifen gilt, und man sich die ganze Fläche in solche Streifen eingetheilt vorstellen kann, so muß die ganze Fläche  $ABC$  in Ruhe bleiben, wenn  $AD$  unterstützt wird, weshalb in  $AD$  der Schwerpunkt von der ganzen Fläche liegen muß.

Fig. 50.

Ähnliche Schlüsse kann man auf Körper anwenden, deren Inhalt sowohl als ihre Grundfläche durch eine Ebene in zwei gleiche Theile getheilt wer-

ren, und wo sämtliche mit der Grundfläche parallele Querschnitte einen Durchmesser der Schwere haben, der in die Ebene fällt, welche den Körper in zwei gleiche Theile eintheilt. Diese Ebene ist alsdann eine Ebene der Schwere, weil in ihr der Schwerpunkt des Körpers liegen muß.

## I. Von dem Schwerpunkte der Linien.

### §. 81.

Der Schwerpunkt von dem Umfange einer jeden gradlinigten Figur kann leicht gefunden werden, wenn man sich das Gewicht jeder einzelnen Linie in ihrer Mitte vereinigt vorstellt, und nach §. 77. den Schwerpunkt dieser Gewichte sucht.

Der Schwerpunkt des Kreises und des Umfangs einer jeden regelmäßigen Figur liegt im Mittelpunkte.

### §. 82.

**Zusatz.** Wollte man den Abstand des Schwerpunkts G, Figur 52., von dem Umfange des Dreiecks ABC durch Rechnung finden, so setze man die Seiten  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , und die Abstände  $XG = x$ ,  $YG = y$ ,  $ZG = z$ . Ferner sollen die Höhen des Dreiecks für die Grundlinie BC wie  $AA'$  durch  $a'$ , für AC durch  $b'$ , für AB durch  $c'$  bezeichnet werden. Bezeichnen nun zugleich die Längen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Gewichte dieser Linien, weil sie den Längen proportional sind, so fällt der Schwerpunkt der Linie  $AC = b$  in ihre Mitte in I); der Schwerpunkt von AB in die Mitte bei F; u. s. w., und man

Zaf. III.  
Fig. 52.

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 129

kann sich in D, F die Gewichte der Linie b, c vereinigt vorstellen. Nimmt man BC als Axe zur Bestimmung der Momente an, und zieht DE, FH auf BC winkelrecht, so ist ED . AC das Moment der Linie AC, HF . AB das Moment der Linie AB, oder weil  $HF = ED = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} a'$  ist, so erhält man  $ED . AC = \frac{1}{2} a' b$ ;  $HF . AB = \frac{1}{2} a' c$ , also nach §. 77. den Abstand XG von der Axe BC oder

$$x = \frac{\frac{1}{2} a' b + \frac{1}{2} a' c}{a + b + c} = \frac{a' (b + c)}{2 (a + b + c)}.$$

Eben so findet man für die Axe AC den Abstand YG oder

$$y = \frac{b' (a + c)}{2 (a + b + c)} \text{ und endlich ZG oder}$$

$$z = \frac{c' (a + b)}{2 (a + b + c)}$$

oder wenn man die Summe der drei Seiten  $a + b + c = S$  setzt, so wird

$$x = \frac{a' (S - a)}{2 S}; \quad y = \frac{b' (S - b)}{2 S}; \quad z = \frac{c' (S - c)}{2 S}.$$

Wären die Höhen  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  des Dreiecks nicht bekannt, sondern nur der Inhalt Q desselben, so ist

$Q = \frac{1}{2} a a' = \frac{1}{2} b b' = \frac{1}{2} c c'$ ; also  $a' = \frac{2Q}{a}$  u. s. w.; folglich erhält man auch die Abstände

$$x = \frac{S - a}{a S} Q; \quad y = \frac{S - b}{b S} Q; \quad z = \frac{S - c}{c S} Q.$$

§. 83.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden.

**Auflösung.** Der Kreisbogen AB, Figur 53., Taf. III. von welchem gleich große Stücke gleiches Gewicht haben. Fig. 53.

ben, sey bei D in zwei gleiche Theile getheilt, und aus dem zugehörigen Mittelpunkte C die Linie CD gezogen, so ist diese ein Durchmesser der Schwere, und in derselben muß der Schwerpunkt G des Bogens AB liegen. Man ziehe A'B' durch C auf CD winkelrecht, theile den Bogen AB in eine sehr große Menge äußerst kleiner gleich großer Theile, wie mn, so ist das Moment für die Linie A'B' von  $mn = mn \cdot mm'$ ; wo  $mm'$ ,  $nn'$  so wie AA', BB' auf A'B' winkelrecht sind. Man setze, daß

r den Halbmesser CD

b den Bogen ADB und

s die Sehne AB bezeichne; ferner sey no auf  $mm'$  winkelrecht, so ist  $\triangle mno \sim Cmm'$ , daher

$$mm' : Cm = no : mn \text{ also}$$

$$mn = \frac{Cm \cdot no}{mm'} = \frac{r \cdot m'n'}{mm'}.$$

Es ist also das Moment des Bogenstücks  $mn = mn \cdot mm' = r \cdot m'n'$ .

Für jedes andere Bogenstück wie vw findet man sein Moment  $= r \cdot v'w'$ , daher die Summe aller Momente  $= r \cdot A'B' = r \cdot AB = r \cdot s$ .

Die Summe dieser Momente muß dem Momente des ganzen Bogens CG . b gleich seyn, daher

$$CG \cdot b = rs, \text{ folglich}$$

$$CG = \frac{r \cdot s}{b}$$

oder weil auch  $b : s = r : CG$ , so verhält sich die Länge eines Kreisbogens zu seiner Sehne, wie der Halbmesser des zugehörigen Kreises zum

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 131

Abstände des Schwerpunktes dieses Bogens vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises.

1. Zusatz. Wäre AB der Quadrant eines Kreises, so ist  $s = r\sqrt{2}$  und  $b = \frac{1}{2}\pi r$  daher

$$CG = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0,9003166 \cdot r$$

oder beinahe

$$CG = \frac{9}{10} r$$

es liegt daher der Schwerpunkt von dem Bogen eines Quadranten sehr nahe  $\frac{9}{10}$  des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt.

2. Zusatz. Für den Halbkreis ist  $s = 2r$  und  $b = \pi r$  also

$$CG = 2 \frac{r}{\pi} = 0,63661977 \cdot r \text{ oder beinahe}$$

$$CG = \frac{2}{\pi} r.$$

Der Schwerpunkt eines Halbkreises liegt daher sehr nahe  $\frac{2}{\pi}$  des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt.

Anmerkung. Wird der Punkt G unterstützt, so muß der Bogen AB ruhen. Weil aber hier G nicht in den Bogen fällt, so wird hierbei vorausgesetzt, daß der Punkt G mit dem Bogen in einer festen Verbindung stehe.

## §. 84.

Für den Viertelkreis oder Quadranten AEB, Figur 54., sen der Halbmesser  $AC = BC = r$ , Taf. III.  $AP = x$ ,  $PE = y$ , der Bogen  $AE = v$ , und Fig. 54. sein Schwerpunkt liege in G. Ferner sen der Horizontalabstand  $EI = w$  und der Vertikalabstand  $IG = w'$ , so ist



$AE = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2rx}$  und nach §. 83.

$$CG = \frac{r \cdot AE}{\text{Bogen } AE} = \frac{r\sqrt{2rx}}{v}.$$

Weil die Dreiecke GIK, CPK und CAF einander ähnlich sind, so verhält sich

$$CA : AF = CG : PI \text{ oder}$$

$$r : \frac{1}{2}\sqrt{2rx} = \frac{r\sqrt{2rx}}{v} : y - w \text{ daher ist}$$

$$ry - rw = \frac{r^2 x}{v}, \text{ und man findet hieraus den}$$

Horizontalabstand EI für den Schwerpunkt G oder

$$(I) \quad w = y - \frac{rx}{v}.$$

Nun ist ferner

$$IP = y - w = y - y + \frac{rx}{v} = \frac{rx}{v} \text{ und}$$

$CF = \sqrt{CA^2 - AF^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}rx}$ . Es verhält sich aber

$$AF : CF = PI : CP + IG \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2rx} : \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}rx} = \frac{rx}{v} : r - x + w'.$$

und hieraus

$$r - x + w' = \frac{2rx}{v\sqrt{2rx}} \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}rx} = \frac{r}{v} \sqrt{2rx - x^2} = \frac{ry}{v}$$

weil für den Kreis  $y = \sqrt{2rx - x^2}$  ist. Man findet daher den Verticalabstand IG oder

$$(II) \quad w' = x - r + \frac{ry}{v}.$$

Beispiel. Der Bogen AE sey der achte Theil vom Umfange des Kreises, so ist  $v = \frac{2\pi r}{8} = \frac{1}{4}\pi r$ ; der Winkel ACE = 45 Grad, also

$$CP = PE = y = \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ und } x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) r$$

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 133

daher

$$w = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi} \right) r = 0,3341837 \cdot r$$

und

$$w' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) r = 0,1932095 \cdot r.$$

§. 85.

Zusatz. Für den ganzen Viertelfreis wird

$$x = y = r \text{ und } v = \frac{1}{2} \pi r, \text{ daher}$$

$$EI = r - \frac{2r^2}{\pi r}$$

oder man findet den Horizontalabstand

$$(I) \quad w = \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) r = 0,36338023 \cdot r$$

oder beinahe  $w = \frac{1}{3} r$ .

Ferner ist  $IG = r - r + \frac{2r^2}{\pi r}$  oder man erhält den Verticalabstand

$$(II) \quad w' = \frac{2r}{\pi} = 0,63661977 \cdot r$$

oder beinahe  $w' = \frac{2}{3} r$ .

Merkwürdig ist, daß hier  $w + w' = r$  gefunden wird.

§. 86.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 84. sey  $G'$  Figur 54., der Schwerpunkt des Kreisbogens  $BE$  Taf. III. und  $BI' = w''$ ,  $I'G' = w'''$ , so ist der Bogen Fig. 54.

$$BE = \frac{1}{2} \pi r - v$$

$$BE = \sqrt{(2r \cdot BL)} = \sqrt{[2r(r - y)]} \text{ und §. 83.}$$

$$CG' = \frac{r \cdot BE}{\frac{1}{2} \pi r - v} = \frac{r \sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2} \pi r - v}.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke  $EBL$  und  $CG'I'$  verhält sich

$$EB : EL = CG' : CI' \text{ oder}$$

$$\sqrt{(2r^2 - 2ry)} : r - x = \frac{r\sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2}\pi r - v} : r - w'.$$

Hieraus findet man den Horizontalabstand  $BI'$  für den Schwerpunkt  $G'$  oder

$$(I) \quad w' = r - \frac{r(r - x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}.$$

Ferner verhält sich

$$EB : BL = CG' : GI \text{ oder}$$

$$\sqrt{(2r^2 - 2ry)} : r - y = \frac{r\sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2}\pi r - v} : w''$$

daher ist der Verticalabstand  $I'G'$  oder

$$(II) \quad w''' = \frac{r(r - y)}{\frac{1}{2}\pi r - v}.$$

\* §. 87.

**Aufgabe.** Von einer jeden krummen Linie  $AM$ ,  
 Taf. III. Figur 55., die Lage des Schwerpunkts  $G$  ganz all-  
 Fig. 55. gemein zu bestimmen.

**Auflösung.** Die Natur der krummen Linie sey durch eine Gleichung gegeben, so daß für die rechtwinklichten Coordinaten  $A$  der Anfangspunkt der Abscissen ist. Man setze  $AP = x$ ,  $PM = y$ , den Bogen  $AM = v$ . Ferner sey  $FG$  winkelrecht auf  $AP$ , und zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts,  $AF = u$ ,  $FG = u'$ . Wächst nun  $x$  um  $Pp = \partial x$ , also der Bogen  $v$  um  $Mm = \partial v$ , und man zieht  $AN$  auf  $AP$  und  $MN$  auf  $AN$  winkelrecht, so ist das Moment von  $\partial v$  gegen die Linie  $AN = NM \cdot Mm = x \partial v$  also  $\int x \partial v$  die Summe aller Momente vom Bogen  $AM$  gegen diese Linie  $AN$ , und wenn die

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 135

Summe der Momente durch die Summe der Gewichte  
 $= v$  dividirt wird, so erhält man  $AF$  oder

$$(I) \quad \bar{u} = \frac{\int x \partial v}{v}.$$

Das Moment vom Elemente  $Mm$  gegen die Linie  $AP$   
 ist  $PM \cdot Mm = y \partial v$ , also die Summe der Mo-  
 mente  $= \int y \partial v$ , daher wie vorhin der Abstand des  
 Schwerpunktes von der Linie  $AP$ , also  $FG$  oder

$$(II) \quad \bar{u}' = \frac{\int y \partial v}{v}.$$

Es sey  $GI$  winkelrecht auf  $MP$ , und man setze  
 $MI = w$ ,  $IG = w'$ , so ist  $w = y - u'$ ; man  
 erhält daher den Horizontalabstand  $MI$  oder

$$(III) \quad w = y - \frac{\int y \partial v}{v}$$

und weil  $w' = x - u$  ist, so findet man den Ver-  
 ticalabstand  $IG$  oder

$$(IV) \quad w' = x - \frac{\int x \partial v}{v}.$$

Mit Hülfe der beiden ersten oder letzten Formeln  
 ist man im Stande, die Lage des Schwerpunktes einer  
 jeden krummen Linie zu finden, wobei zu bemerken  
 ist, daß

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

gesetzt werden kann, wenn  $\partial v$  nicht aus andern Um-  
 ständen bekannt ist.

Wäre  $A$  der Scheitel einer krummen Linie von  
 gleichen entgegengesetzten Ordinaten, so ist  $F$  der Schwer-  
 punkt der ganzen Kurve, so wie  $G$  der Schwerpunkt  
 für die Hälfte ist. Zur Bestimmung des Schwer-

punkts von der ganzen Kurve hat man daher nur den Werth  $AF = u$  nöthig, wogegen für die halbe Kurve die Werthe  $u$  und  $u'$  bestimmt werden müssen, um die Lage des Schwerpunkts derselben anzugeben.

\* §. 88.

**Aufg. III.** Aufgabe. Den Schwerpunkt  $G$ , Figur 55., von dem Bogen  $AM$  einer Parabel zu finden.

**Auflösung.** Die Gleichung für die Parabel ist  $ax = y^2$ , so ist  $a \partial x = 2y \partial y$  also

$$\partial x^2 = \frac{4y^2}{a^2} \partial y^2 \text{ daher}$$

$$\partial v = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial y}{a} \sqrt{a^2 + 4y^2} \text{ oder}$$

wenn man  $a^2 + 4y^2 = Y$  setzt

$$\partial v = \frac{\partial y}{a} \sqrt{Y}, \text{ daher (P. A. G. 161. VII.)}$$

$$v = \int \frac{\partial y}{a} \sqrt{a^2 + 4y^2} = \frac{y}{2a} \sqrt{Y} + \frac{a}{4} \log n(2y + \sqrt{Y}) + \text{Const.}$$

Für  $x = 0$  wird  $y$  und  $v = 0$  und  $\sqrt{Y} = a$ ,

also  $\text{Const} = -\frac{a}{4} \log n a$ , daher

$$v = \frac{y}{2a} \sqrt{Y} + \frac{a}{4} \log n \frac{2y + \sqrt{Y}}{a} = \int \frac{\partial y}{a} \sqrt{Y}.$$

Nun ist  $x \partial v = \frac{y^2}{a} \partial v = \frac{y^2 \partial y}{a^2} \sqrt{Y}$  daher (P. A. G. 153. (3))

$$\int x \partial v = \frac{y}{16a^2} \sqrt{Y}^3 - \frac{a}{16} \int \frac{\partial y}{a} \sqrt{Y} = \frac{y}{16a^2} \sqrt{Y}^3 - \frac{a v}{16}.$$

Es ist aber §. 87.  $u = \frac{\int x \partial v}{v}$ , daher findet man den

Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel  $A = AF$  oder

$$(I) \quad u = \frac{y \sqrt{(a^2 + 4y^2)^3} - a^2 v}{16 a^2 v}.$$

Ferner ist

$$\int y \, dv = \int \frac{y \, dy}{a} \sqrt{(a^2 + 4y^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3}}{12a} + \text{Const.}$$

Für  $y = 0$  verschwindet das Integral, also ist  
 $\text{Const} = -\frac{a^3}{12}$  daher ist

$$\int y \, dv = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3} - a^3}{12a} \text{ folglich §. 87. der Ab-}$$

stand des Schwerpunkts von der Ase oder FG =

$$(II) \quad u' = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3} - a^3}{12av}.$$

Anmerkung. Es wird hier nochmal erinnert, daß durch  $\log$  die briggschen, und durch  $\log n$  die natürlichen Logarithmen angedeutet werden.

\* §. 89.

Aufgabe. Den Schwerpunkt G, Figur 55., von Taf. III.  
 dem Bogen einer Hyperbel AM zu finden. Fig. 55.

Auflösung. Der Anfangspunkt der Abscissen falle in den Scheitel A, so ist für  $AP = x$ ,  $PM = y$ , wenn  $2a$  die Hauptaxe und  $2b$  die Nebenaxe der Hyperbel bezeichnen,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) \quad [I] \text{ also}$$

$$x^2 + 2ax = \frac{a^2 y^2}{b^2}$$

und wenn auf beiden Seiten  $a^2$  addirt, und die Quadratwurzel ausgezogen wird

$$a + x = \frac{a}{b} \sqrt{(b^2 + y^2)} \text{ und}$$

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{(b^2 + y^2)} - a \quad [II]$$

Aus [I] folgt ferner, wenn man differenzirt

$$y \, dy = \frac{b^2}{a} (a + x) \, dx \text{ oder}$$

$$\partial x = \frac{a^2 y \partial y}{b^2 (a + x)} = \frac{a^2 y \partial y}{a b \sqrt{(b^2 + y^2)}} \text{ also}$$

$$\partial x^2 = \frac{a^2 y^2 \partial y^2}{b^2 (b^2 + y^2)}. \text{ Diesen Werth in die Gleichung}$$

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} \text{ gesetzt giebt}$$

$$\partial v = \frac{\partial y}{b} \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 + b^2) y^2}{b^2 + y^2}}.$$

Hieraus und aus [II] findet man

$$x \partial v = \frac{a \partial v}{b} \sqrt{(b^2 + y^2)} - a \partial v = \frac{a \partial y}{b^2} \sqrt{[b^4 + (a^2 + b^2) y^2]} - a \partial v$$

oder wenn man  $a^2 + b^2 = \alpha^2$  setzt

$$\int x \partial v = \int \frac{a \partial y}{b^2} \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)} - a v.$$

Es ist aber (P. N. G. 161. VII)

$$\int \partial y \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)} + \frac{b^4}{2\alpha} \log n [\alpha y + \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)}] + \text{Const.}$$

Für  $y=0$  verschwindet das Integral, und man erhält

$$\text{Const.} = - \frac{b^4}{2\alpha} \log n . b^2 \text{ folglich}$$

$$\int x \partial v = \frac{a y}{2 b^2} \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)} + \frac{a b^2}{2 \alpha} \log n \frac{\alpha y + \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)}}{a b} - a v.$$

Da nun nach §. 87. (I)  $u = \frac{\int x \partial v}{v}$  ist, so findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente des Scheitels oder  $AF =$

$$(I) u = \frac{a}{2v} \left[ \frac{b^2}{y} \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)} + \frac{b^2}{\alpha} \log n \frac{\alpha y + \sqrt{(b^4 + \alpha^2 y^2)}}{b^2} \right] - a.$$

Weil ferner  $\partial y = \frac{b^2 (a + x) \partial x}{a^2 y}$ , so findet man

auch

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial x}{a^2 y} \sqrt{[a^4 y^2 + b^4 (a + x)^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{\partial x}{a^2} \sqrt{[a^4 y^2 + b^4 (a + x)^2]}.$$

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 139

Setzt man aus [I] für  $y^2$  seinen Werth, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung

$$y \partial v = \frac{b \partial x}{a^2} \sqrt{[a^2 b^2 + 2a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)x^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{b \partial x}{a^2} \sqrt{[a^2 b^2 + 2a\alpha^2 x + \alpha^2 x^2]}.$$

Zur Abkürzung setze man

$$a^2 b^2 + 2a\alpha^2 x + \alpha^2 x^2 = X$$

so ist (P. A. S. 147. II.).

$$\int y \partial v = \frac{b(a+x)}{2a^2} \sqrt{X} - \frac{a^2 b}{2a} \log n [2\alpha^2(a+x) + 2\alpha \sqrt{X}] + \text{Const.}$$

Mit  $x = 0$  verschwindet das Integral, und man erhält  $\sqrt{X} = ab$ , also

$$\text{Const} = -\frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2a} \log n [2\alpha^2 a + 2\alpha ab] \text{ daher}$$

$$\int y \partial v = \frac{b(a+x)}{2a^2} \sqrt{X} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2 b}{2a} \log n \frac{a(a+x) + \sqrt{X}}{a(a+b)}.$$

Nach §. 87. (II) ist aber  $u' = \frac{\int y \partial v}{v}$ , daher findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Ase der Hyperbel oder  $FG =$

$$(II) \quad u' = \frac{b}{2v} \left[ \frac{a+x}{a^2} \sqrt{X} - b - \frac{a^2}{a} \log n \frac{a(a+x) + \sqrt{X}}{a(a+b)} \right].$$

\* §. 90.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt G, Figur 55., eines elliptischen Bogens AM zu finden. Tab. III.  
Fig. 55.

**Auflösung.** Fällt der Anfangspunkt der Abscissen in den Scheitel der kleinen Ase der Ellipse, so sey A dieser Scheitel,  $AP = x$ ,  $PM = y$ , die große Ase  $= 2a$ , die kleine  $= 2b$ , so ist die Gleichung für die Ellipse, bei welcher die Abscissen vom Scheitel der kleinen Ase gerechnet werden,



$$y^2 = \frac{a^2}{b^2} (2bx - x^2) \text{ [I] also}$$

$$x^2 - 2bx = -\frac{b^2 y^2}{a^2}$$

und wenn auf beiden Seiten  $b^2$  addirt und die Quadratwurzel ausgezogen wird

$$b - x = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \text{ und}$$

$$x = b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \text{ [II].}$$

Aus [I] folgt ferner  $y \partial y = \frac{a^2}{b^2} (b - x) \partial x$  oder

$$\partial x = \frac{b^2 y \partial y}{a^2 (b - x)} = \frac{b^2 y \partial y}{ab \sqrt{a^2 - y^2}} \text{ also}$$

$$\partial x^2 = \frac{b^2 y^2 \partial y^2}{a^2 (a^2 - y^2)}. \text{ Diesen Werth in die Gleichung}$$

$$\partial v = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} \text{ gesetzt, giebt}$$

$$\partial v = \frac{\partial y}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Hieraus und aus [II] findet man

$$x \partial v = b \partial v - \frac{b \partial v}{a} \sqrt{a^2 - y^2} = b \partial v - \frac{b \partial y}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) y^2}$$

oder wenn man  $a^2 - b^2 = \alpha^2$  setzt

$$\int x \partial v = b v - \int \frac{b \partial y}{a^2} \sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2}.$$

Es ist aber (P. N. S. 161. VIII.)

$$\int \partial y \sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2} = \frac{1}{2} y \sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2} + \frac{a^4}{2\alpha} \text{Arc tgt} \frac{\alpha y}{\sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2}} + \text{Const.}$$

wo Const. = 0 ist, weil das Integral mit  $y = 0$  verschwindet. Nun ist auch

$$\text{Arc sin} \frac{\alpha y}{a^2} = \text{Arc tgt} \frac{\alpha y}{\sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2}} \text{ daher}$$

$$\int \partial y \sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2} = \frac{1}{2} y \sqrt{a^4 - \alpha^2 y^2} + \frac{a^4}{2\alpha} \text{Arc sin} \frac{\alpha y}{a^2}$$

folglich

# I. Vom Schwerpunkte der Linien. 141

$$\int x \partial v = b v - \frac{b y}{2 a^2} \sqrt{(a^2 - a^2 y^2)} + \frac{b a^2}{2 a^2} \text{Arc sin } \frac{a y}{a^2}.$$

Nach §. 87. (I.) ist  $u = \frac{\int x \partial v}{v}$ , daher findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel, oder  $AF =$

$$(I) u = b - \frac{b}{2 v} \left[ \frac{y}{a^2} \sqrt{(a^2 - a^2 y^2)} + \frac{a^2}{a^2} \text{Arc sin } \frac{a y}{a^2} \right].$$

Weil  $\partial y = \frac{a^2 (b - x) \partial x}{b^2 y}$ , so findet man auch

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial x}{b^2 y} \sqrt{[b^4 y^2 + a^4 (b - x)^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{\partial x}{b^2} \sqrt{[b^4 y^2 + a^4 (b - x)^2]}.$$

Setzt man aus [I] für  $y^2$  seinen Werth, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung

$$y \partial v = \frac{a \partial x}{b^2} \sqrt{[a^2 b^2 - 2 b (a^2 - b^2) x + (a^2 - b^2) x^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{a \partial x}{b^2} \sqrt{[a^2 b^2 - 2 a^2 b x + a^2 x^2]}.$$

Wird zur Abkürzung  $a^2 b^2 - 2 a^2 b x + a^2 x^2 = X$  gesetzt, so erhält man (P. N. S. 147. II.)

$$\int y \partial v = - \frac{a(b-x)}{2 b^2} \sqrt{X} + \frac{a b^2}{2 a^2} \log n [2 a \sqrt{X} - 2 a^2 (b - x)] + \text{Const.}$$

Für  $x = 0$  verschwindet das Integral, und man erhält  $\sqrt{X} = a b$ , also

$$\text{Const.} = \frac{a^2}{2} - \frac{a b^2}{2 a^2} \log n [2 a a b - 2 a^2 b]$$

daher

$$\int y \partial v = \frac{a^2}{2} - \frac{a(b-x)}{2 b^2} \sqrt{X} + \frac{a b^2}{2 a^2} \log n \frac{\sqrt{X} - a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Weil nun §. 87. (II.)  $u' = \frac{\int y \partial v}{v}$  ist, so erhält

$$\int \frac{2\partial x \sqrt{x}}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \int \frac{2\partial x}{\sqrt{(2r-x)}} = -4\sqrt{(2r-x)} + \text{Const.}$$

und weil mit  $x=0$  das Integral verschwindet, so ist  
 $\text{Const.} = 4\sqrt{2r}$ , daher das vollständige Integral  
 $= 4[\sqrt{2r} - \sqrt{(2r-x)}]$ .

Man erhält daher aus [I], [II] und [III]

$$\int y \partial v = \frac{2}{3}(4r+x)\sqrt{2r}\sqrt{(2r-x)} - \frac{1}{3}r^2 + 2r\sqrt{(2rx)} \text{Arcsinvers} \frac{x}{r}.$$

Nun ist §. 87. (II)  $u' = \frac{\int y \partial v}{v} = \frac{\int y \partial v}{2\sqrt{2rx}}$ , daher der Abstand  
des Schwerpunkts von der Aze oder

$$(II) \quad u' = \frac{4r+x}{3} \sqrt{\frac{2r-x}{x}} - \frac{4r}{3} \sqrt{\frac{2r}{x}} + r \text{Arcsinvers} \frac{x}{r}.$$

\* §. 94.

Zusatz. Für die ganze Höhe der Enfloide wird  
 $x=2r$ , und man erhält den Abstand des Schwer-  
punkts vom Scheitel oder

$$u = \frac{2}{3} r.$$

Für den Abstand von der Aze wird

$$\text{Arcsinvers} \frac{x}{r} = \text{Arcsinvers} 2 = \pi, \text{ also}$$

$$u' = -\frac{4}{3} r + \pi r = 1,808259 \cdot r.$$

\* §. 95.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Kettenlinie  
zu finden.

Auflösung. Der Scheitel der Kettenlinie liege

Ref. III. in A, Figur 55., und es sey  $AP=x$ ,  $PM=y$ , und  
Fig. 55. der Bogen  $AM=v$ , so ist (Anhang §. 92. I.)

$$v^2 = 2cx + x^2, \text{ wo } c \text{ eine beständige Größe ist.}$$

Hieraus erhält man

$$v \partial v = (c+x) \partial x \text{ [I] oder mit } \frac{x}{v \partial x} \text{ multipliziert}$$

$$\frac{x\partial v}{\partial x} = \frac{cx+x^2}{v} + \frac{cx}{v} - \frac{cx}{v} = \frac{2cx+x^2}{v} - \frac{cx}{v} = \frac{v^2}{v} - \frac{cx}{v} \text{ oder}$$

$$x\partial v = v\partial x - \frac{cx\partial x}{v} \quad [\text{II}].$$

Nun ist ferner bei der Kettenlinie (Anhang §. 89.)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{v} \text{ und nach [I]}$$

$$c\partial x = v\partial v - x\partial x.$$

Werden die auf einerlei Seite des Gleichheitszeichens stehenden Glieder beider Gleichungen mit einander multiplicirt, so wird

$$c\partial y = c\partial v - \frac{cx\partial x}{v} \text{ oder}$$

$$\frac{cx\partial x}{v} = c\partial v - c\partial y.$$

Diesen Werth in die Gleichung [II] gesetzt, giebt

$$x\partial v = v\partial x - c\partial v + c\partial y \text{ oder}$$

$$2x\partial v = x\partial v + v\partial x - c\partial v + c\partial y \text{ also}$$

$$2\int x\partial v = xv - cv + cy$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit  $x=y=v=0$  verschwindet. Nun ist §. 87. (I) der Abstand des Schwerpunkts von der durch den Scheitel gehenden Tangente,  $u = \frac{\int x\partial v}{v}$  daher

$$(I) \quad u = \frac{xv - cv + cy}{2v}.$$

Ferner ist  $v\partial y = c\partial x$  also

$$\int v\partial y = \int c\partial x = cx \text{ daher}$$

$$\int y\partial v = vy - \int v\partial y = vy - cx.$$

Da nun für den Abstand des Schwerpunkts von der Ase  $u' = \frac{\int y \partial v}{v}$  ist, so erhält man

$$(II) \quad u' = \frac{vy - cz}{v}.$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren.

### §. 96.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Dreiecks zu finden.

**Auflösung.** Man theile  $BC$ , Figur 56., in  $D$ , und  $AC$  in  $E$ , in zwei gleiche Theile, ziehe  $AD$  und  $BE$ , so sind diese Durchmesser der Schwere also nach §. 80. der Durchschnittspunkt  $G$  der Schwerpunkt des Dreiecks.

Wird die Linie  $DE$  gezogen, so ist solche mit  $AB$  parallel, weil  $AE = \frac{1}{2}AC$  und  $BD = \frac{1}{2}BC$  ist. Dieserhalb ist das Dreieck  $GDE \sim AGB$ , und es verhält sich

$DG : GA = DE : AB$ . Da nun

$AC = 2CE$  so wird

$AB = 2DE$  also

$DG : GA = DE : 2DE = 1 : 2$  folglich

$2DG = GA$  oder  $DG = \frac{1}{3}AD$  oder  $AG = \frac{2}{3}AD$ .

Man findet daher den Schwerpunkt eines Dreiecks, wenn von irgend einem Winkelpunkte nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite eine grade Linie gezogen, und diese Linie in drei gleiche Theile getheilt wird. Der Schwerpunkt liegt alsdann im zweiten Theilungspunkte, vom Scheitel an gerechnet.

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 147

Wenn gleich die Linien  $AD$ ,  $BE$  das Dreieck  $ABC$  in zwei gleiche Theile theilen, und jede Linie durch  $G$  ein Durchmesser der Schwere ist, so folgt doch hieraus nicht, daß auch durch jeden Durchmesser der Schwere das Dreieck in gleich große Theile getheilt wird; weil im Dreiecke nicht so wie beim Parallelogramme, Kreise 2c. ein Mittelpunkt der Größe (*Centrum magnitudinis*) vorhanden ist. So würde eine durch  $G$  mit  $AB$  parallele Linie das Dreieck in zwei Theile theilen, wovon der nach  $C$  gelegene  $\frac{2}{3}$  und der nach  $AB$  gelegene  $\frac{1}{3}$  vom Inhalte des Dreiecks  $ABC$  enthält. Dagegen sind aber auch die nach  $C$  gelegenen schweren Theile des Dreiecks weiter entfernt, als die nach  $AB$  gelegenen, und haben daher auch größere Momente.

### §. 97.

Der Abstand des Schwerpunkts eines jeden Dreiecks von irgend einer willkürlich angenommenen Linie, welche mit dem Dreiecke in einerlei Ebene fällt, wird gefunden, wenn man den dritten Theil von der Summe der drei Abstände nimmt, um welche die Spitzen des Dreiecks von der angenommenen Linie entfernt sind.

**Beweis.** Es sey  $ABC$ , Figur 57., das gegebene Dreieck,  $A'B'$  die angenommene Linie, und  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  die drei Abstände der Dreiecksspitzen von der Linie  $A'B'$ . Man halbire  $BC$  in  $E$ , ziehe  $AE$ , und nehme  $EG = \frac{1}{3} AE$ , so ist  $G$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  (§. 96.). Nun werde  $AD$  mit  $A'B'$  parallel, und  $EK$  auf  $AD$  winkelrecht gezogen, so ist

Tab. III.  
Fig. 57.

$$EK = \frac{CF + BD}{2}.$$

R 2

Es ist aber  $AG = \frac{2}{3}AE$ , also auch

$$GH = \frac{2}{3}EK = \frac{2}{3} \cdot \frac{CF + BD}{2} = \frac{CF + BD}{3}.$$

Weil ferner  $HG' = AA' = DB' = FC'$  so ist auch

$$HG' = \frac{AA' + DB' + FC'}{3} \text{ folglich}$$

$$GH + HG' = \frac{CF + BD + AA' + DB' + FC'}{3} \text{ oder}$$

weil  $BD + DB' = BB'$  und  $CF + FC' = CC'$  ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunktes von der Linie  $A'B'$  oder

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

### §. 98.

In jedem Dreiecke ist die Summe von den Quadraten der Seiten desselben dreimal so groß, als die Summe von den Quadraten derjenigen Linien, welche man vom Schwerpunkte nach den Spitzen des Dreiecks ziehen kann.

Zaf. III.  
Fig. 58.

**Beweis.** Im Dreieck  $ABC$ , Figur 58.; sey  $G$  der Schwerpunkt, und durch denselben die Linien  $AF$ ,  $BE$ ,  $CH$  gezogen. Man setze  $BF = FC = a$ ,  $AE = EC = b$ ,  $AH = HB = c$ ; ferner  $BE = e$ ,  $AF = f$ ,  $CH = h$  und den Winkel  $AFB = \alpha$ , so ist  $AB^2 = AF^2 + FB^2 - 2AF \cdot BF \cdot \cos \alpha$  und  $AC^2 = AF^2 + CF^2 + 2AF \cdot CF \cdot \cos \alpha$  folglich  $AB^2 + AC^2 = 2AF^2 + FB^2 + CF^2 = 2AF^2 + 2BF^2$  oder

$$4c^2 + 4b^2 = 2f^2 + 2a^2 \text{ oder}$$

$$f^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2. \text{ Auf gleiche Art ist}$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 149

$$e^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \text{ und}$$

$$h^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

daher wenn man diese drei letzten Gleichungen mit einander verbindet

$$f^2 + e^2 + h^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Es ist aber  $AG = \frac{2}{3}f$  also  $f^2 = \frac{9}{4}AG^2$

$BG = \frac{2}{3}e$  also  $e^2 = \frac{9}{4}BG^2$

$CG = \frac{2}{3}h$  also  $h^2 = \frac{9}{4}CG^2$

folglich wenn man diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung setzt

$$\frac{9}{4}(AG^2 + BG^2 + CG^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

oder

$$3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = BC^2 + AC^2 + AB^2.$$

§. 99.

Vom Parallelogramme sind die beiden Diagonalen Durchmesser der Schwere, daher liegt der Schwerpunkt im Durchschnittspunkte derselben.

Eben so liegt der Schwerpunkt einer Kreisfläche im Mittelpunkte. Auch fällt der Schwerpunkt eines jeden regelmäßigen Vielecks mit dem Mittelpunkte desjenigen Kreises zusammen, welcher um das Vieleck beschrieben werden kann.

Diese Sätze folgen unmittelbar aus §. 80.

§. 100.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines jeden Vierecks zu finden.

**Auflösung.** Man suche die Schwerpunkte  $f, f'$ , Figur 59., der Dreiecke  $ABC, ACD$ , so ist  $ff'$  ein Durchmesser der Schwere vom Viereck  $ABCD$ . Sucht

Zaf. III.

Fig. 59.



man nun ferner die Schwerpunkte  $g$ ,  $g'$  der Dreiecke  $ABD$ ,  $BCD$ , und zieht  $gg'$ , so ist auch dieses ein Durchmesser der Schwere des Vierecks, daher  $G$  der gesuchte Schwerpunkt.

### §. 101.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines jeden Fünfecks zu finden.

**Auflösung.** Man suche den Schwerpunkt  $f$  vom Viereck  $ABCD$ , Figur 60., und  $f'$  vom Dreieck  $ADE$ , so ist  $ff'$  ein Durchmesser der Schwere für das Fünfeck. Eben so wenn  $g$  der Schwerpunkt vom Viereck  $ABCE$ , und  $g'$  vom Dreieck  $CDE$  ist, so muß  $gg'$  gleichfalls ein Durchmesser der Schwere seyn, daher ist  $G$  der Schwerpunkt des Fünfecks.

### §. 102.

Auf ähnliche Art, wie §. 100. und 101. kann man mittelst des Schwerpunkts vom Fünfeck den des Sechsecks, und so des Siebenecks u. s. w. bestimmen, weil dies Verfahren aber alsdann sehr umständlich wird, so ist es leichter, um von jedem unregelmäßigen Vielecke den Schwerpunkt zu finden, solche in Dreiecke zu theilen, und von zwei sich schneidenden Linien die Entfernung ihrer Schwerpunkte zu bestimmen, da sich dann leicht nach §. 77. die Lage des Schwerpunkts der ganzen Figur bestimmen läßt, wenn man die Inhalte der Dreiecke, welche ihren Gewichten proportional sind, als Gewichte an den einzelnen Schwerpunkten in Rechnung bringt.

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 151

**Beispiel.** Wäre der Schwerpunkt des Sechsecks  $ABCDEF$ , Figur 61., zu finden, so theile man dasselbe in Dreiecke, und bestimme außer ihren Inhalten die Entfernungen ihrer Schwerpunkte  $g, g', g'', g'''$  von den beiden Linien  $XY, YZ$ . Ist nun

Taf. III.  
Fig. 61.

$$\triangle ABF = 12 \square \text{Fuß}; a \ g = 4; b \ g = 10 \text{ Fuß}$$

$$BEF = 17 \text{ — } a' \ g' = 5\frac{1}{2}; b' \ g' = 9 \text{ —}$$

$$BCE = 21 \text{ — } a'' \ g'' = 6; b'' \ g'' = 5\frac{1}{2} \text{ —}$$

$$CDE = 13 \text{ — } a''' \ g''' = 10; b''' \ g''' = 7 \text{ —}$$

so erhält man für den Schwerpunkt  $G$  der ganzen Figur

$$HG = \frac{12 \cdot 4 + 17 \cdot 5\frac{1}{2} + 21 \cdot 6 + 13 \cdot 10}{12 + 17 + 21 + 13} = 6,31 \text{ Fuß}$$

$$KG = \frac{12 \cdot 10 + 17 \cdot 9 + 21 \cdot 5\frac{1}{2} + 13 \cdot 7}{12 + 17 + 21 + 13} = 7,61 \text{ Fuß.}$$

§. 103.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt von einem Trapez zu bestimmen.

**1. Auflösung.** Durch Zeichnung. Man theile die parallelen Seiten  $AD, BC$ , Figur 62., vom Trapez  $ABCD$  in zwei gleiche Theile in  $E, F$ , ziehe  $EF$ , so ist diese Linie ein Durchmesser der Schwere (§. 80.) vom Trapez. Ferner suche man die Schwerpunkte  $g, g'$  der Dreiecke  $ABD$  und  $BCD$ , so ist  $gg'$  ebenfalls ein Durchmesser der Schwere, daher der Durchschnittspunkt von  $EF$  und  $gg'$  oder  $G$ , der Schwerpunkt vom Trapez.

Taf. III.  
Fig. 62.

**2. Auflösung.** Durch Rechnung. Mit  $BC$  parallel werde  $gh, g'h'$  gezogen, so ist weil (§. 96.)  $Eg = \frac{1}{3}EB$  auch  $Eh = \frac{1}{3}EF$ ; und weil  $Fg' = \frac{1}{3}FD$ , auch  $Fh' = \frac{1}{3}EF$ , daher  $Eh = Fh' = \frac{1}{3}EF = hh'$ .

Die Gewichte vom Trapez  $ABCD$  und  $\triangle BCD$

verhalten sich wie ihre Inhalte, und diese wie  $(AD + BC)$  und  $BC$ . Nun müssen am Hebel  $g g'$  die Gewichte der Dreiecke in den zugehörigen Schwerpunkten  $g, g'$  mit dem Gewichte des Trapezes in  $G$  im Gleichgewichte seyn, also ist das Moment

$$gG \cdot (AD + BC) = g g' \cdot BC \text{ oder}$$

$$AD + BC : BC = g g' : gG.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke  $Ggh, Gg'h'$  verhält sich auch

$$g g' : gG = h h' : hG$$

oder, indem  $\frac{1}{3} EF$  statt  $h h'$  gesetzt wird,

$$AD + BC : BC = \frac{1}{3} EF : hG \text{ also}$$

$$hG = \frac{BC \cdot EF}{3 (AD + BC)}.$$

Nun ist

$$EG = Eh + hG \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{3} EF + \frac{BC \cdot EF}{3 (AD + BC)}.$$

Man setze  $EF = a, AD = b, BC = c$ , so wird

$$EG = \frac{1}{3} a + \frac{ac}{3 (b + c)}$$

daher wenn beide Glieder unter einen Nenner gebracht werden

$$(I) \quad EG = \frac{a (b + 2c)}{3 (b + c)}$$

woraus leicht der Schwerpunkt  $G$  mittelst der Linie  $EF = a$  bestimmt werden kann.

Weil  $FG = a - EG$ , so erhält man, wenn der obige Werth für  $EG$  gesetzt wird, und beide Glieder auf einen Nenner gebracht werden

$$(II) \quad FG = \frac{a (2b + c)}{3 (b + c)}.$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 153

### §. 104.

Wollte man die Lage des Schwerpunkts  $G$  bei einem Trapez nicht durch die Mittellinie  $EF$ , Figur 62., sondern mittelst einer auf der Grundlinie  $AD$ , Figur 63., winkelrechten Linie  $HG$  finden, so sey  $BC = b$ ,  $AD = c$ , die Höhe  $CE = BF = h$  und  $AF = e$ ; ferner die gesuchten Entfernungen  $AH = u$  und  $HG = u'$ . Nimmt man nun die auf  $AD$  winkelrechte Linie  $AN$  als Momentanaxe an, und zieht  $AC$ , so erhält man nach §. 97. das

Taf. III.  
Fig. 63.

$$\text{Moment vom Dreieck } ADC = \frac{c + b + e}{3} \cdot \frac{1}{2} ch$$

$$ABC = \frac{b + 2e}{3} \cdot \frac{1}{2} bh.$$

Die Summe dieser Momente muß dem Momente vom ganzen Trapez, also  $= u \frac{(b + c)}{2} h$  seyn, man erhält daher

$$\frac{1}{2} u h (b + c) = \frac{1}{6} ch (b + c + e) + \frac{1}{6} bh (b + 2e)$$

und hieraus den Abstand

$$(I) \quad AH = u = \frac{b^2 + c^2 + bc + 2be + ce}{3(b + c)}.$$

Um den Abstand  $HG$  zu finden, darf man nur die Momente der beiden Dreiecke  $ACD$ ,  $ABC$  gegen  $AD$  suchen, und wie vorhin verfahren. Nun ist das

$$\text{Moment vom Dreieck } ACD = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} ch$$

$$ABC = \frac{2}{3} h \cdot \frac{1}{2} bh$$

daher weil die Summe dieser Momente dem Momente  $u' \cdot \frac{b + c}{2} h$  gleich seyn muß, so erhält man den Abstand

$$(II) \quad HG = u' = \frac{(2b + c) h}{3(b + c)}.$$

Für  $e = 0$  fällt die Linie  $AB$  in  $AN$ , und man erhält alsdann

$$(III) \quad AH = u = \frac{b^2 + c^2 + bc}{3(b+c)} = \frac{(b+c)^2 - bc}{3(b+c)}.$$

§. 105.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Kreisabschnitts zu finden.

**Auflösung.** Wird der Bogen  $AB$ , Figur 64., des Abschnitts  $ABC$  in zwei gleiche Theile in  $D$  getheilt, so ist  $CD$  ein Durchmesser der Schwere, in welchem der Schwerpunkt  $G$  des Abschnitts liegen muß. Mit der Sehne  $AB$  parallel, durch  $C$ , ziehe man  $A'B'$ , und theile den Bogen  $ADB$  in eine Menge äußerst kleiner gleich großer Theile wie  $mn$ , so läßt sich von jedem dieser kleinen Dreiecke wie  $mnC$  der Schwerpunkt  $g$  in der Linie  $Co$  angeben (§. 96.) Auf  $A'B'$  sen  $gg'$ ,  $mp'$ ,  $oo'$ ,  $nn'$ ,  $AA'$ ,  $BB'$ , und auf  $mp'$  sen  $np$  winkelrecht, so ist, wenn von der angenommenen Axe  $A'B'$  sämtliche Momente der kleinen Dreiecke und des ganzen Abschnitts bestimmt werden,  $\frac{mn \cdot oC}{2} \cdot gg'$  das Moment des Dreiecks  $mnC$ .

Nun ist  $Cg = \frac{2}{3}Co$ , daher  $gg' = \frac{2}{3}oo'$ , oder weil  $mo$  so klein genommen werden kann, daß der Unterschied zwischen  $oo'$  und  $mp'$  nicht in Betrachtung kommt,  $gg' = \frac{2}{3}mp'$ . Setzt man den Halbmesser  $AC = CB = r$ , so ist alsdann

$$\frac{mn \cdot oC}{2} \cdot gg' = \frac{mn \cdot r}{2} \cdot \frac{2}{3}mp' = \frac{1}{3}r \cdot mn \cdot mp'.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke  $Cmp'$  und  $mnp$  verhält sich

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 155

$Cm : mp' = mn : pn$ , daher ist

$$mn \cdot mp' = Cm \cdot pn = r \cdot p'n'$$

und hienach das Moment des  $\triangle m n C$

$$\frac{1}{3} r \cdot mn \cdot mp' = \frac{1}{3} r^2 \cdot p'n'.$$

Sucht man auf diese Art für jedes andere Dreieck wie  $v w C$  das Moment, so erhält man dafür,

$$\frac{1}{3} r^2 \cdot v'w'.$$

Es ist daher die Summe von den Momenten der Dreiecke, welche den Ausschnitt  $A B C$  ausmachen

$$\frac{1}{3} r^2 \cdot A'B' = \frac{1}{3} r^2 \cdot AB.$$

Für das Gleichgewicht in Bezug auf die Ase  $A'B'$  muß daher das Moment des ganzen Ausschnitts  $= \frac{1}{3} r^2 \cdot AB$  seyn. Man setze, daß  $b$  den Bogen  $A D B$  und

$s$  die Sehne  $A B$  bezeichne, so ist der Inhalt des Ausschnitts  $= \frac{1}{2} r \cdot b$ , daher

$$\frac{1}{2} r b \cdot CG = \frac{1}{3} r^2 \cdot s \text{ oder}$$

die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkte

$$CG = \frac{\frac{1}{2} r \cdot s}{b}$$

$$\text{oder } b : s = \frac{2}{3} r : CG$$

es verhält sich daher der Bogen eines Ausschnitts zu seiner Sehne, wie zwei Drittel des Halbmessers zur Entfernung des Schwerpunkts des Ausschnitts vom Mittelpunkte.

§. 106.

1. Zusatz. Für den Halbkreis ist  $s = 2r$  und  $b = \pi r$ , wenn  $\pi = 3,14159 \dots$  ist, daher

$$CG = \frac{2}{3} \frac{r}{\pi} = 0,424413 \cdot r$$

oder sehr nahe

$$CG = \frac{3}{4} r.$$

Der Schwerpunkt eines Halbkreises liegt daher  $\frac{3}{4}$  des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt.

§. 107.

2. Zusatz. Bei einem Viertelskreis oder Quadranten ist der Bogen  $b = \frac{1}{2}\pi r$  und  $s^2 = 2r^2$ , also  $s = r\sqrt{2}$ , daher findet man den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot r = 0,600211 \cdot r$$

oder sehr nahe

$$CG = \frac{3}{4} r.$$

Zus. III. Man ziehe in dem Quadranten ABC, Figur 64.;  
Fig. 64. GF auf AC winkeltrecht, so ist in dem rechtwinklichen Dreiecke CGF, die Seite CF = FG, also

$$2 CF^2 = CG^2 = \frac{4^2 \cdot 2}{3^2 \cdot \pi^2} \cdot r^2 \text{ oder}$$

$$CF^2 = \frac{16 r^2}{9 \pi^2}$$

und man erhält den Abstand des Schwerpunktes von demjenigen Halbmesser, welcher den Quadranten einschließt, oder

$$CF = FG = \frac{4 r}{3\pi} = 0,424413 \cdot r.$$

§. 108.

3. Zusatz. Wollte man für den Ausschnitt ADBC den Abstand CG des Schwerpunktes durch den Winkel ACB =  $\alpha$  ausdrücken, so ist  $\frac{1}{2} AB = AC \sin \frac{1}{2} \alpha$  oder  $\frac{1}{2} s = r \sin \frac{1}{2} \alpha$ , also  $s = 2r \sin \frac{1}{2} \alpha$ . Bezeichnet nun Arc  $\alpha$  die Länge eines Bogens für den

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 157

Halbmesser  $= 1$ , welcher den Winkel  $ACB$  zum Maas hat, so verhält sich  $1 : CA = \text{Arc } \alpha : \text{Bog. } ADB$ , also  $\text{Bogen } ADB = CA \cdot \text{Arc } \alpha$ , oder  $b = r \text{ Arc } \alpha$ . Man erhält daher für jeden Ausschnitt den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \frac{4r \sin \frac{1}{2} \alpha}{3 \text{ Arc } \alpha}.$$

§. 109.

**Aufgabe.** Von der Durchschnitsfläche eines Gewölbes  $ADBFE$ , Figur 65., welche zwischen concentrischen Kreisbogen und verlängerten Halbmessern eingeschlossen ist, den Schwerpunkt zu finden. Taf. III.  
Fig. 65.

**Auflösung.** Man ergänze den Ausschnitt  $ACB$ , ziehe durch den Mittelpunkt  $C$  die Linie  $CD$  nach der Mitte des Bogens  $AB$ , so ist  $CD$  ein Durchmesser der Schwere für die Gewölbfläche  $ABF$ , den Ausschnitt  $ACB$  und  $ECF$ . Sind nun  $G, G', g$  die Schwerpunkte dieser Flächen, ferner

der Halbmesser  $CA = R, CE = r$ ;

die Sehne  $AB = S, EF = s$ ;

der Bogen  $ADB = B, EF = b$ , so ist

die Fläche des Ausschnitts  $ACB = \frac{1}{2} B \cdot R$

die Fläche des Ausschnitts  $ECF = \frac{1}{2} b \cdot r$

und die Gewölbfläche  $ABFE = \frac{1}{2} (B \cdot R - b \cdot r)$ .

In der Are  $CD$  müssen die Momente der beiden letzten Flächen, dem Momente des ganzen Ausschnitts gleich seyn, also,

$CG \cdot \frac{1}{2} (B \cdot R - b \cdot r) + Cg \cdot \frac{1}{2} b \cdot r = CG' \cdot \frac{1}{2} B \cdot R$  daher



$$CG = \frac{CG' \cdot B \cdot R - Cg \cdot b \cdot r}{B \cdot R - b \cdot r}.$$

Es verhält sich aber

$$R : r = B : b \text{ daher}$$

$$b = \frac{r \cdot B}{R}. \text{ Eben so ist } \frac{s}{b} = \frac{S}{B}.$$

Nach §. 105. findet man

$$CG' = \frac{2R \cdot S}{3B};$$

$$Cg = \frac{2r \cdot s}{b} = \frac{2rS}{B}.$$

Die Werthe von  $CG'$ ,  $Cg$  und  $b$  in obige Gleichung gesetzt, geben, wenn Zähler und Nenner mit  $R$  multipliziert wird, den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte für die Gewölbläche  $ADBF$  oder

$$CG = \frac{2S}{3B} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2}.$$

**Zus. III.** Ist der Bogen  $ADB$ , Figur 65., ein Halbkreis, so  
**Fig. 65.** wird  $S = 2r$  und  $B = \pi r$ , also

$$CG = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} = 0,424413 \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2}.$$

§. 110.

**1. Zusatz.** Wären nicht die Halbmesser  $CA = R$  und  $CE = r$ , sondern der mittlere Halbmesser  $CK = \rho$  für die centrische Linie des Gewölbbogens und die Breite  $AE = \beta$  gegeben, so erhält man

$$R = \rho + \frac{1}{2}\beta \text{ und } r = \rho - \frac{1}{2}\beta.$$

Es ist aber

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$$

daher wenn man in diesem letzten Ausdruck statt  $R$  und  $r$  die gefundenen Werthe setzt, so wird

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 159

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} = \frac{3e^2 + \frac{1}{2}\beta^2}{2e} = \frac{12e^2 + \beta^2}{8e}.$$

Ist ferner  $B'$  der Bogen  $KL$ , welcher zum Halbmesser  $e$  gehört, und  $S'$  die zu diesem Bogen gehörige Sehne, so verhält sich

$$B : B' = S : S' \text{ also ist } \frac{S}{B} = \frac{S'}{B'}.$$

Setzt man die gefundenen Werthe in die für  $CG$  §. 109. gefundene Gleichung, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt oder

$$CG = \frac{S' (12e^2 + \beta^2)}{12 B' e}.$$

Für  $\beta = 0$  wird  $CG = \frac{S'e}{B'}$  wie §. 83.

### §. 111.

2. Zusatz. Wird das Verfahren §. 109. zur Bestimmung des Schwerpunkts von der Durchschnittsfläche eines Gewölbes näher erwogen, so sieht man daraus, wie man ganz allgemein aus dem bekannten Schwerpunkte einer Figur und eines Theils derselben den Schwerpunkt des andern Theiles finden kann; auch läßt sich eben so aus den gegebenen Schwerpunkten der Theile einer Figur der Schwerpunkt der ganzen Figur finden.

Eine Figur bestehe aus zwei Theilen, deren Inhalte  $P$  und  $Q$  und ihre Schwerpunkte  $A$  und  $B$ , Figur 25., sind. Durch die Linie  $AB$  verbinde man beide Schwerpunkte, so liegt in  $AB$  ein Punkt  $C$ , welcher gehörig unterstützt beide Theile in Ruhe erhält. Es ist daher  $C$  der Schwerpunkt der ganzen Figur,

Zaf. I.  
Fig. 25.

und wenn ihr Inhalt  $= R$  gesetzt wird, so ist  $R = P + Q$ , und man findet

$$AC = \frac{AB \cdot Q}{P + Q}$$

$$BC = \frac{BA \cdot P}{P + Q} \text{ und}$$

$$AB = \frac{AC \cdot R}{Q} = \frac{BC \cdot R}{P}.$$

§. 112.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Kreisabschnitts zu finden.

Taf. III.  
Fig. 66.

**Auflösung.** Es sey C, Figur 66., der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher zu dem Abschnitte ABD gehört; wird nun durch die Mitte des Bogens die Linie CD gezogen, so ist diese ein Durchmesser der Schwere für den Abschnitt. Man setze, daß G der Schwerpunkt vom Abschnitte, g vom  $\triangle ABC$ , und G' vom Ausschnitt ADBC ist, so müssen die Momente des Abschnitts und Dreiecks dem Momente des Ausschnitts gleich seyn. Werden diese von C gerechnet, und der Inhalt des Abschnitts  $= A$  gesetzt, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. der Inhalt des  $\triangle ABC = \frac{1}{2} s \cdot EC$  und des Ausschnitts  $= \frac{1}{2} br$ , daher

$$CG \cdot A + Cg \cdot \frac{1}{2} s \cdot CE = CG' \cdot \frac{1}{2} br.$$

Aber  $Cg = \frac{2}{3} CE$  (§. 96.) und  $CG' = \frac{\frac{1}{2} r s}{b}$  also

$$CG \cdot A + \frac{1}{3} s \cdot CE^2 = \frac{1}{3} sr^2.$$

Im rechtwinklichten  $\triangle BCE$  ist

$$CE^2 = r^2 - \frac{1}{4} s^2$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 161

wird dies in die letzte Gleichung gesetzt und abgekürzt, so findet man

$$CG = \frac{s^2}{12A}.$$

Den Abstand des Schwerpunkts eines Kreisabschnitts vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises findet man daher, wenn der Würfel von der Sehne des Abschnitts durch das zwölffache seines Inhalts dividirt wird.

### §. 113.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer Fläche ABFE, Figur 67., zu finden, welche in einem Kreise zwischen parallelen Sehnen eingeschlossen ist.

Tab. III.  
Fig. 67.

**Auflösung.** Die Fläche AF werde durch den Abschnitt ADB zu einem Abschnitte EDF ergänzt, und C sey der Mittelpunkt des Kreises, zu welchem diese Abschnitte gehören; DC ein Durchmesser der Schwere. Ferner sey

$$EF = S, AB = s, CD = r;$$

der Inhalt der Fläche AF = A

und des Abschnitts ADB = B. Ferner

G, g, G' die Schwerpunkte der Flächen AF, ADB und EFDE, so muß das Moment des ganzen Abschnitts EFDE den Momenten der beiden Flächen, woraus derselbe bestehet, gleich seyn, also

$$CG \cdot A + Cg \cdot B = CG' \cdot (A + B). \text{ Aber §. 112.}$$

$$Cg = \frac{s^2}{12B} \text{ und } CG' = \frac{s^2}{12(A + B)}$$

daher findet man, wenn diese Werthe in obige Gleichung gesetzt werden,

$$CG = \frac{s^2 - s'^2}{12A}.$$

§. 114.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer jeden Fläche **Af. III. A'H'H'A'**, Figur 68., zu finden, welche von zwei **Fig. 68.** symmetrischen krummen Linien begrenzt wird.

**Auflösung.** Es sey **AH** die Aze, welche durch die Mitte der Ordinaten **A'A'**, **H'H'** geht. Diese Aze werde in so viel gleiche Theile **AB**, **BC**, . . . . **GH** getheilt, daß alle durch die Punkte **B**, **C**, . . . mit **A'A'** gezogene Parallellinien von den krummen Linien solche Theile wie **A'B'**, **B'C'**, . . . . abschneiden, welche man ohne merklichen Fehler als grade annehmen kann.

Man ziehe die Diagonalen **A'B'**, **B'C'** . . . . **G'H'**, und setze **A'A' = a**, **B'B' = b** . . . . **G'G' = g**, **H'H' = h** und **AH = k**. Ferner sey die Anzahl der gleichen Theile **AB**, **BC** . . . . = **n**, und jeder = **a**, so ist **k = na**. Nun ist der Inhalt der Dreiecke **A'A'B' =  $\frac{a^2}{2}$** ; **A'B'B' =  $\frac{ab}{2}$** ; **B'B'C' =  $\frac{ab}{2}$** ; . . . .

**G'H'H' =  $\frac{ah}{2}$** , daher findet man die Summe aller Dreiecke oder den Inhalt der Fläche **A'H'H'A'**

$$= \frac{a}{2} (a + b + b + c + c + d + \dots + g + g + h)$$

$$= \frac{a}{2} (a + 2b + 2c + \dots + 2g + h) \text{ oder}$$

$$= a \left[ \frac{a + h}{2} + b + c + d + \dots + g \right].$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 163

Wird nun  $A'A'$  als Aze der Momente für sämtliche Dreiecke angenommen, so findet man (§. 96. und 97.) das Moment vom Dreiecke

$$A'A'B' = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \alpha = \frac{1}{6} \alpha^2 a$$

$$A'B'B' = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2}{3} \alpha = \frac{2}{6} \alpha^2 b$$

$$B'B'C' = \frac{ab}{2} \cdot \frac{4}{3} \alpha = \frac{4}{6} \alpha^2 b$$

$$B'C'C' = \frac{ac}{2} \cdot \frac{5}{3} \alpha = \frac{5}{6} \alpha^2 c$$

$$F'G'G' = \frac{ag}{2} \cdot \frac{3n-4}{3} \alpha = \frac{3n-4}{6} \alpha^2 g$$

$$G'G'H' = \frac{ag}{2} \cdot \frac{3n-2}{3} \alpha = \frac{3n-2}{6} \alpha^2 g$$

$$G'H'H' = \frac{ah}{2} \cdot \frac{3n-1}{3} \alpha = \frac{3n-1}{6} \alpha^2 h$$

also die Summe der Momente für die ganze Fläche  $A'H'H'A'$

$$= \frac{\alpha^2}{6} [a + 6b + 12c + 18d + \dots + 6(n-1)g + (3n-1)h]$$

oder

$$\alpha^2 \left[ \frac{a + (3n-1)h}{6} + 1b + 2c + 3d + 4e + \dots + (n-1)g \right].$$

Weil die Linie  $AH$  sämtliche Ordinaten halbt, so ist solche ein Durchmesser der Schwere. Es sey daher  $O$  der Schwerpunkt, so erhält man, wenn mit dem gefundenen Flächeninhalte in die Summe der Momente dividirt wird, den Abstand des Schwerpunkts von der Momentanaxe  $A'A'$  oder

$$AO = \frac{a \left[ \frac{a + (3n-1)h}{6} + b + 2c + 3d + 4e + \dots + (n-1)g \right]}{\frac{a+h}{2} + b + c + d + e + \dots + g}.$$

Dieses Verfahren ist übrigens desto genauer, je größer die Anzahl der Theile ist, in welche man die Aze eintheilt.

Beispiel. Die Aze einer symmetrischen Fläche sey 4,5, ihre erste Ordinate = 8,66; die letzte = 22,913. Man habe die Aze in 6 gleiche Theile getheilt, und für die zwischen liegenden Ordinaten folgende Werthe gefunden: 12,247; 15,000; 17,321; 19,365; 21,213; so ist hier  $a = 8,66$ ;  $h = 22,913$ ;  $k = 4,5$  und  $n = 6$ ; also  $\alpha = 0,75 = \frac{3}{4}$ , daher

$$\frac{a + (3n-1)h}{6} = \frac{8,66 + 17 \cdot 22,913}{6} = 66,530$$

$$\frac{a+h}{2} = \frac{8,66 + 22,913}{2} = 15,786$$

b = 12,247	einmal	12,247
c = 15,000	doppelt	30,000
d = 17,321	dreifach	51,963
e = 19,365	vierfach	77,460
f = 21,213	fünffach	106,065
		<hr/>
		85,146
		<hr/>
		277,735
		<hr/>
		15,786
		<hr/>
		66,530
		<hr/>
		344,265
		<hr/>
		100,932
		<hr/>

Nun ist  $\alpha = \frac{3}{4}$ , daher der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate, oder

$$AO = \frac{3 \cdot 344,265}{4 \cdot 100,932} = 2,539.$$

§. 115.

Zusatz. Schneiden die Kurven  $A'H'$ ,  $A''H''$ ,  
 Taf. III. Fig. 68. die Aze AH im Punkte A, so wird  $a = 0$ ,

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 165

und man verfährt genau eben so, wie im vorigen §., nur daß  $a$  als 0 in Rechnung gebracht wird. Eben das gilt, wenn die Punkte  $H'$ ,  $H''$  mit  $H$  zusammen fallen, oder wenn irgend eine andere Ordinate  $= 0$  wird.

Schneide die Kurve die Ase an beiden Enden, so wird  $a = 0$  und  $h = 0$ , daher erhält man alsdann

$$AO = \frac{a [b + 2c + 3d + \dots + (n-1)g]}{b + c + d + \dots + g}$$

wo  $n$  wie vorher die Anzahl der Theile bezeichnet, in welche die Ase  $AH$  eingetheilt ist.

Anmerkung. Diese sinnreiche Art, den Schwerpunkt einer unregelmäßigen Fläche zu finden, ist von Bouguer in den Additions zu seiner Preißschrift: *de la Mâtire des Vaisseaux*. Paris 1727. p. 123 etc. angegeben worden.

### §. 116.

Aufgabe. Die Gestalt einer krummen Linie, welche eine ebene Fläche begrenzt, ist durch eine Gleichung zwischen ihren Coordinaten gegeben; man soll die Lage des Schwerpunkts einer solchen Fläche ganz allgemein bestimmen.

Auflösung. Die Fläche  $APMA$ , Figur 69., Taf. III. werde durch die krumme Linie begrenzt, deren Natur Fig. 69. durch eine Gleichung zwischen den Abscissen  $AP = x$  und den rechtwinklichten Ordinaten  $PM = y$  gegeben ist. Ferner sey die Fläche  $APMA = M$ , und wenn  $G$  der Schwerpunkt dieser Fläche ist,  $AF = u$ , und der winkelrechte Abstand  $FG = u'$ .

Wächst  $x$  um  $Pp = \partial x$ , so wächst die Fläche



M um  $PpmM = \partial M = y \partial x$ . Gegen die auf AP winkelrechte Linie AN ist das Moment des Elements  $\partial M = x \partial M = xy \partial x$ , und die Summe der Momente von den Elementen der ganzen Fläche gegen  $AN = \int xy \partial x$ . Aber das Moment der Fläche M gegen AN ist auch  $= u \cdot M$ , daher  $uM = \int xy \partial x$ , folglich erhält man den Abstand des Schwerpunktes der Fläche APM von A oder AF

$$(I) \quad u = \frac{\int xy \partial x}{M}$$

oder auch

$$u = \frac{\int x \partial M}{M} = \frac{\int xy \partial x}{\int y \partial x}.$$

Um FG oder den Abstand des Schwerpunktes G von der Axe AP zu finden, bestimme man die Summe von den Momenten der Flächenelemente gegen diese Axe. Der Schwerpunkt des Elements  $PpmM = \partial M$  liegt in der Mitte desselben, also um  $\frac{1}{2} PM = \frac{1}{2} y$  von AP entfernt. Es ist daher das Moment dieses Elements gegen AP  $= \frac{1}{2} y \partial M = \frac{1}{2} y \cdot y \partial x$ , daher die Summe der Momente aller Elemente der ganzen Fläche gegen AP  $= \frac{1}{2} \int y^2 \partial x$ . Da nun das Moment der Fläche M gegen AP auch  $u' \cdot M$  ist, so erhält man  $u'M = \frac{1}{2} \int y^2 \partial x$  oder den Abstand FG des Schwerpunktes G von der Axe AP oder

$$(II) \quad u' = \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$$

oder auch

$$u' = \frac{\int y \partial M}{2M} = \frac{\int y^2 \partial x}{2 \int y \partial x}.$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 167

Wäre A der Scheitel einer symmetrischen Curve  $MAM'$ , bei welcher also die Fläche  $APM$  der Fläche  $APM'$  gleich und ähnlich ist, so ist F der Schwerpunkt von der ganzen Fläche  $MAM'M$ , so wie G der Schwerpunkt von der halben Fläche.

\* §. 117.

Zusatz. Man ziehe  $GI$  auf  $MP$  winkelrecht, und setze  $MI = w$ ,  $IG = w'$ , so kann man auch die Lage des Schwerpunkts G finden, wenn diese beiden Größen bekannt sind. Nun ist  $MI = MP - FG$ , daher erhält man  $MI$  oder

$$(I) \quad w = y - \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$$

und weil  $IG = AP - AF$  ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der Ordinate  $MP$  oder  $IG$

$$(II) \quad w' = x - \frac{\int xy \partial x}{M}.$$

\* §. 118.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Parabelfläche zu finden.

Auflösung. Für  $AP = x$ ,  $PM = y$  sei  $ax = y^2$  die gegebene Gleichung, so ist  $\partial x = \frac{2y \partial y}{a}$ , also

$$xy \partial x = \frac{2y^4 \partial y}{a^2}, \text{ daher}$$

$$\int xy \partial x = \frac{2}{a^2} \int y^4 \partial y = \frac{2y^5}{5a^2},$$

wo  $\text{Const.} = 0$  ist. Aber die Fläche  $M = \frac{2}{3} xy = \frac{2y^3}{3a}$ , daher weil §. 116. (I),  $u = \frac{\int xy \partial x}{M}$ , so er-

hält man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel A, oder

$$(I) \quad u = \frac{3y^2}{5a} = \frac{2}{5} x$$

welches zugleich der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel A für die ganze Parabel ist.

Um den Abstand des Schwerpunkts von der Axe AP für die halbe Parabelfläche APM zu finden, ist

$$y^2 \partial x = \frac{2y^2 \partial y}{a}, \text{ also } \int y^2 \partial x = \frac{2}{a} \int y^3 \partial y = \frac{y^4}{2a}; \text{ daher,}$$

weil  $u' = \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$ , erhält man FG oder

$$(II) \quad u' = \frac{2}{5} y = \frac{2}{5} \sqrt{ax}.$$

\* §. 119.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt der Hyperbelfläche zu finden.

**Auflösung.** Die gegebene Gleichung sey

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

so findet man  $y \partial y = \frac{b^2}{a^2} (a + x) \partial x$ , also

$$\frac{a^2 y^2 \partial y}{b^2} = (a + x) y \partial x, \text{ daher}$$

$$\int (a + x) y \partial x = \frac{a^2}{b^2} \int y^2 \partial y = \frac{a^2 y^3}{3b^2} \text{ oder, weil}$$

$$\int (a + x) y \partial x = a \int y \partial x + \int xy \partial x \text{ und §. 116.}$$

Die Fläche  $M = \int y \partial x$  ist, so erhält man

$$aM + \int xy \partial x = \frac{a^2 y^3}{3b^2} \text{ oder}$$

$$\int xy \partial x = \frac{a^2 y^3}{3b^2} - aM. \text{ Es ist aber §. 116.}$$

**Satz. III.**  $u = \frac{\int xy \partial x}{M}$ , daher findet man Figur 69. AF oder  
Fig. 69.

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 169

$$(I) \quad u = \frac{a^2 y^2}{3b^2 M} - a$$

wo (P. A. S. 484.)

$$M = \frac{b(a+x)}{2a} \sqrt{(2ax+x^2)} - \frac{ab}{2} \log n \frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a} \text{ ist.}$$

Weil ferner  $y^2 \partial x = \frac{b^2}{a^2} (2ax+x^2) \partial x$ , so erhält man

$$\int y^2 \partial x = \frac{b^2}{a^2} \int (2ax+x^2) \partial x = \frac{b^2}{a^2} (ax^2 + \frac{1}{3} x^3)$$

daher §. 116. (II)  $\frac{\int y^2 \partial x}{2M}$  oder FG =

$$(II) \quad u' = \frac{b^2 (3a+x) x^2}{6a^2 M}.$$

\* §. 120.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines elliptischen Abschnitts zu finden, wenn der Scheitel des Abschnitts in das Ende der kleinen Axe der Ellipse fällt.

**Auflösung.** Wäre a der Halbmesser der großen, und b der Halbmesser der kleinen Axe, so ist Figur 69. für AP = x, PM = y die allgemeine Gleichung, wenn die Abscissen vom Scheitel der kleinen Axe gerechnet werden

Def. III.  
Fig. 69.

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2} (2bx - x^2) \text{ also}$$

$$y \partial y = \frac{a^2}{b^2} (b-x) \partial x \text{ oder } y^2 \partial y = \frac{a^2}{b^2} (b-x) y \partial x$$

daher

$$\int (b-x) y \partial x = \frac{b^2}{a^2} \int y^2 \partial y = \frac{b^2 y^3}{3a^2} \text{ und weil}$$

$$\int (b-x) y \partial x = b \int y \partial x - \int xy \partial x, \text{ und da}$$

ferner §. 116. die Fläche  $M = \int y \partial x$  ist, so erhält man

$$bM - \int xy \partial x = \frac{b^3 y^3}{3a^2} \text{ oder}$$

$$\int xy \partial x = bM - \frac{b^3 y^3}{3a^2}. \text{ Es ist aber §. 116. (I)}$$

$$u = \frac{\int xy \partial x}{M}, \text{ daher AF oder}$$

$$(I) \quad u = b - \frac{b^3 y^3}{3a^2 M}.$$

Ferner ist  $y^2 \partial x = \frac{a^2}{b^2} (2bx - x^2) \partial x$  daher

$$\int y^2 \partial x = \frac{a^2}{b^2} \int (2bx - x^2) \partial x = \frac{a^2}{b^2} (bx^2 - \frac{1}{3} x^3)$$

daher, weil §. 116. (II)  $\frac{\int y^2 \partial x}{2M} = u'$ , erhält man FG oder

$$(II) \quad u' = \frac{a^2 (3b - x) x^2}{6b^2 M}.$$

Um den Werth von der Fläche M durch x auszudrücken, ist  $y \partial x = \frac{a \partial x}{b} \sqrt{(2bx - x^2)}$ . Aber (P. A. S. 161. (X))

$$\int \partial x \sqrt{(2bx - x^2)}$$

$$= \frac{1}{2} (x - b) \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{1}{2} b^2 \text{Arc tgt} \frac{x-b}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{1}{2} (b - x) \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{1}{2} b^2 \text{Arc sinvers} \frac{x}{b} + \text{Const.} (*)$$

Für  $x=0$  verschwindet das Integral, und man erhält

$$\int \partial x \sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{1}{2} b^2 \text{Arc sinvers} \frac{x}{b} - \frac{1}{2} (b - x) \sqrt{(2bx - x^2)}$$

folglich, weil  $M = \int y \partial x$ , findet man die Fläche

$$M = \frac{1}{2} a b \text{Arc sinvers} \frac{x}{b} - \frac{a(b-x)}{2b} \sqrt{(2bx - x^2)}.$$

---

(\*) Man kann wegen dieses Ausdrucks die Anmerkung im Anhang §. 9. nachsehen.

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 171

\* §. 121.

1. Zusatz. Für die halbe elliptische Fläche wird  $x = b$ ,  $y = a$ , und

$$\text{Arc sinvs } \frac{x}{b} = \text{Arc sinvs } 1 = \frac{1}{2} \pi, \text{ also}$$

$$M = \frac{1}{4} \pi a b, \text{ daher } u = b - \frac{a b^2}{3 M}.$$

Man findet also den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel der kleinen Axe, oder  $AF =$

$$u = b \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right) = 0,575587 \cdot b$$

oder beinahe  $u = \frac{2}{3} r$ .

Der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte der Ellipse ist hiernach  $= b - u = \frac{4b}{3\pi}$ , oder beinahe  $= \frac{2}{3} r$ .

Es ist daher für die halbe elliptische Fläche der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel von der Länge der großen Axe ganz unabhängig, und wenn man den hier gefundenen Ausdruck mit §. 106. vergleicht, so folgt daraus, daß der Schwerpunkt einer halben elliptischen Fläche eben so weit vom Mittelpunkte entfernt ist, als der Schwerpunkt einer halben Kreisfläche, deren Halbmesser mit der halben kleinen Axe der Ellipse, und deren Mittelpunkt mit dem der Ellipse übereinkommt.

\* §. 122.

2. Zusatz. Für den elliptischen Quadranten  $APM$ , Figur 69., erhält man wie im vorigen §.  $AF$  oder

Tab. III.  
Fig. 69.

$$u = b \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right)$$

und weil für  $x = b$ ,  $M = \frac{1}{2} \pi a b$  ist, so findet man  $FG$  oder

$$u' = \frac{4a}{3\pi}.$$

• §. 123.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt von der Durchschnittsfläche eines elliptischen Gewölbogens  $ADBFHE$ , Figur 70., zu finden, welcher von zwei halben Ellipsen begrenzt wird, und dessen Scheitel  $D$  in der kleinen Ase  $DC$  liegt.

**Auflösung.** Ist  $C$  der Mittelpunkt beider Ellipsen, welche das Gewölbe begrenzen; die halben großen Axen  $CB = A$ ,  $CF = a$ , und die halben kleinen Axen  $CD = B$ ,  $CH = b$ ; ferner  $G'$  der Schwerpunkt von der elliptischen Fläche  $ABDA$ ,  $g$  von der Fläche  $EFHE$ , und  $G$  der Schwerpunkt des Gewölbogens  $AEHFBDA$ , so ist der Inhalt von der

Fläche  $ABDA = \frac{1}{2} \pi \cdot A \cdot B$   
 Fläche  $EFHE = \frac{1}{2} \pi \cdot a \cdot b$   
 Fläche  $AEHFBDA = \frac{1}{2} \pi (A \cdot B - a \cdot b).$

Aus ähnlichen Gründen, wie §. 109., findet man

$$CG = \frac{CG' \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot A \cdot B - Cg \cdot \frac{1}{2} \pi a \cdot b}{\frac{1}{2} \pi (A \cdot B - a \cdot b)} = \frac{CG' \cdot A \cdot B - Cg \cdot a \cdot b}{A \cdot B - a \cdot b}$$

Es ist aber §. 122.

$$CG' = \frac{4}{3\pi} \cdot B \text{ und } Cg = \frac{4}{3\pi} \cdot b$$

daher wird wenn diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung gesetzt werden,

$$CG = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{A \cdot B^2 - a \cdot b^2}{A \cdot B - a \cdot b}.$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 173

\* §. 124.

**Aufgabe.** Für den Abschnitt einer Cycloide die Entfernung des Schwerpunkts vom Scheitel zu finden.

**Auflösung.** Für die Cycloide ist (Anhang §. 3. III.)

$$y = r \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} + \sqrt{(2rx - x^2)}$$

also (Anhang §. 9.)

$$\partial y = \frac{(2r - x) \partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ oder}$$

$$x^2 \partial y = \frac{(2rx - x^2) x \partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = x \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

daher (P. II. S. 153. (I))

$$\int x^2 \partial y = \int x \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = -\frac{1}{8} \sqrt{(2rx - x^2)^3} + r \int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Nun ist (Anhang §. 9.)

$$\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (r - x) \sqrt{(2rx - x^2)}$$

daher

$$\int x^2 \partial y = \frac{1}{2} r^3 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} - \frac{1}{6} (3r^2 + rx - 2x^2) \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Aber  $\int xy \partial x = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} \int x^2 \partial y$ , daher, wenn statt  $y$  sein Werth gesetzt wird

$$\int xy \partial x = \frac{1}{4} r (2x^2 - r^2) \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} + \frac{1}{12} (3r^2 + rx + 4x^2) \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Nach §. 116. ist aber  $u = \frac{\int xy \partial x}{M}$ , daher findet man  $AF$  oder den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel =

$$u = \frac{3r(2x^2 - r^2) \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} + (3r^2 + rx + 4x^2) \sqrt{(2rx - x^2)}}{6r(2x - r) \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r} + 6(r + x) \sqrt{(2rx - x^2)}}$$

wo  $M$  nach §. 9. des Anhangs bestimmt ist.



\* §. 125.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer Kettenfläche zu finden.

**Auflösung.** Wenn  $v$  die Länge des Bogens bezeichnet, welcher den Coordinaten  $x, y$  entspricht, so ist für die Kettenlinie  $\sqrt{v} = 2cx + x^2$  (Anhang §. 91. I.) also  $v \partial v = c \partial x + x \partial x$  oder

$$x = \frac{v \partial v}{\partial x} - c.$$

Ferner ist (Anhang §. 91.)  $c \partial x = v \partial y$ , also auch  $\partial y = \frac{c \partial x}{v}$ , oder mit  $x$  multipliziert

$$x \partial y = \frac{cx \partial x}{v}.$$

Die Glieder dieser Gleichung, mit den der vorhin gefundenen multipliziert, geben

$$x^2 \partial y = cx \partial v - \frac{c^2 x \partial x}{v} \quad [I].$$

Nun ist §. 95.

$$x \partial v = \frac{1}{2} x \partial v + \frac{1}{2} v \partial x - \frac{1}{2} c \partial v + \frac{1}{2} c \partial y \text{ und} \\ \frac{cx \partial x}{v} = c \partial v - c \partial y.$$

Diese Werthe in die Gleichung [I] gesetzt geben

$$x^2 \partial y = \frac{1}{2} c (x \partial v + v \partial x) - \frac{3}{2} c^2 \partial v + \frac{3}{2} c^2 \partial y \\ \text{also}$$

$$\int x^2 \partial y = \frac{1}{2} cxv - \frac{3}{2} c^2 v + \frac{3}{2} c^2 y.$$

Aber (P. A. S. 143.)

$$\int xy \partial x = y \int x \partial x - \int \partial y \int x \partial x = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} \int x^2 \partial y \\ \text{oder}$$

$$\int xy \partial x = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{4} cxv + \frac{3}{4} c^2 v - \frac{3}{4} c^2 y, \text{ folglich}$$

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 175

erhält man

weil  $u = \frac{\int xy \partial x}{M}$  und  $M = xy + cy - cv$  ist, (Anhang §. 103. II.) den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel oder

$$(I) \quad u = \frac{2x^2y - cxv + 3c^2v - 3c^2y}{4(xy + cy - cv)}.$$

Ferner ist nach Anhang §. 109.

$$\int y^2 \partial x = \frac{Q}{2} = 2c^2x + (c + x)y^2 - 2cyv,$$

daher findet man, weil  $u' = \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$  ist, den Abstand des Schwerpunkts von der Axe oder

$$(II) \quad u' = \frac{2c^2x + (c + x)y^2 - 2cyv}{2(xy + cy - cv)}.$$

§. 126.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer jeden von einer krummen Linie begränzten Fläche zu bestimmen, wenn auch das Gesetz, nach welchem die Kurve gestaltet ist, unbekannt wäre.

**Auflösung.** Es sey  $AA'G'G$ , Figur 71., die Satz. III.  
Fig. 71. gegebene Fläche, und man sucht den Abstand des Schwerpunkts von der Linie  $AA'$ , welche auf  $AG$  winkelrecht und mit  $GG'$  parallel ist. Man theile  $AG$  in eine beliebige grade Anzahl gleicher Theile  $AB, BC, CD \dots$  und errichte in den Theilungspunkten die Linien  $BB', CC' \dots$  winkelrecht auf  $AG$ . Man setze jeden der gleichen Theile  $AB, BC \dots = a$ , und die Ordinaten  $AA' = a, BB' = b, Cc = c, \dots$  ziehe die Sehnen  $A'C', C'E', E'G'$ , und die Linie  $AK$  auf  $CC'$  winkelrecht.

Statt nun, wie §. 114., die Linien  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$ , ... grade anzunehmen, setze man voraus, daß jeder von den Bogen  $A'C'$ ,  $C'E'$ ,  $E'G'$  einer Parabel zugehöre, welche durch die drei Endpunkte der Ordinaten eines jeden Bogens geht. Nun ist

$$LI = \frac{1}{3} KC' = \frac{c-a}{2}$$

$$B'I = LB' - LI = b - a - \frac{c-a}{2} = \frac{2b-a-c}{2};$$

also der Inhalt der Parabelfläche  $A'B'C'IA' =$   
 $\frac{2}{3} \cdot A'K \cdot B'I = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{2b-a-c}{2} = \frac{2}{3} a (2b - a - c).$

Auf gleiche Art erhält man den Inhalt der Parabelflächen

$$C'D'E'C' = \frac{2}{3} a (2d - c - e)$$

$$E'F'G'E' = \frac{2}{3} a (2f - e - g)$$

also die Summe aller Parabelflächen

$$\frac{2}{3} a (-a + 2b - 2c + 2d - 2e + 2f - g).$$

Die Summe von dem Inhalte der Trapezien  $AA'C'C$ ,  $CC'E'E$  und  $EE'G'G$  ist =

$$a(a+c) + a(c+e) + a(e+g) = a(a+2c+2e+g).$$

Addirt man beide Ausdrücke zusammen, so erhält man

$$\frac{2}{3} a (-a + 2b - 2c + 2d - 2e + 2f - g) + a(a+2c+2e+g)$$

daher ist der Inhalt der ganzen Fläche  $AA'G'G$

$$= \frac{1}{3} a (a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + g)$$

d. h. man findet den Inhalt der Fläche  $AA'G'G$ , wenn man die Summe der ersten und letzten Ordinate einmal, die Summe aller übrigen ungraden Ordinaten zweimal, und die Summe aller graden Ordinaten viermal nimmt, alsdann aber diese drei Summen addirt, und mit dem drit-

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 177

ten Theile des Abstandes zweier Ordinaten multipliziert.

Der Schwerpunkt der Parabelfläche  $A'B'C'$  liegt in der Linie  $B'I$  (§. 80.), also ist sein Abstand von  $AA' = \alpha$ . Für die Parabelfläche  $C'D'E'$  ist der Abstand von  $AA' = 3 \cdot \alpha$  und für  $E'F'G' = 5 \cdot \alpha$ . Man findet daher die Momente dieser Parabelflächen:

$$\alpha \cdot \frac{2}{3} \alpha (2b - a - c) = \frac{2}{3} \alpha^2 (2b - a - c)$$

$$3\alpha \cdot \frac{2}{3} \alpha (2d - c - e) = \frac{2}{3} \alpha^2 (6d - 3c - 3e)$$

$$5\alpha \cdot \frac{2}{3} \alpha (2f - e - g) = \frac{2}{3} \alpha^2 (10f - 5e - 5g)$$

also die Summe dieser Momente

$$= \frac{2}{3} \alpha^2 (-a + 2b - 4c + 6d - 8e + 10f - 5g).$$

Für das Trapez  $AA'C'C$  ist der Abstand seines Schwerpunktes von  $AA'$  (§. 104. II.)

$$2\alpha \cdot \frac{a + 2c}{3(a + c)}, \text{ also sein Moment } \dots\dots\dots \frac{2}{3} \alpha^2 (a + 2c).$$

Für das Trapez  $CC'E'E$  ist der Abstand des Schwerpunktes von  $CC' = 2\alpha \cdot \frac{c + 2e}{3(c + e)}$ , also von  $AA' =$

$$2\alpha \cdot \frac{c + 2e}{3(c + e)} + 2\alpha = \frac{2}{3} \alpha \frac{4c + 5e}{c + e}, \text{ daher sein Moment } \dots\dots\dots \frac{2}{3} \alpha^2 (4c + 5e).$$

Für das Trapez  $EE'G'G$  ist der Abstand des Schwerpunktes von  $AA' =$

$$2\alpha \cdot \frac{e + 2g}{3(e + g)} + 4\alpha = \frac{2}{3} \alpha \cdot \frac{7e + 8g}{e + g}, \text{ daher sein Moment } \dots\dots\dots \frac{2}{3} \alpha^2 (7e + 8g)$$

und man findet die Summe dieser Momente

$$= \frac{2}{3} \alpha^2 (a + 6c + 12e + 8g)$$

wird hiezu die oben gefundene Summe von den Mo-

menten der Parabelflächen addirt, so erhält man die Summe der Momente für die ganze Fläche  $AA'G'G$

$$= \frac{2}{3} \alpha^2 (2b + 2c + 6d + 4e + 10f + 3g)$$

$$= \frac{1}{3} \alpha^2 (1.4b + 2.2c + 3.4d + 4.2e + 5.4f + 6.g)$$

wird diese Summe der Momente durch den gefundenen Inhalt der ganzen Fläche dividirt, so findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Linie  $AA'$

$$= \alpha \cdot \frac{0.a + 1.4b + 2.2c + 3.4d + 4.2e + 5.4f + 6.g}{1.a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + 1g}$$

d. h. man schreibe sämtliche Ordinaten, wie sie auf einander folgen, in eine Reihe unter einander: nehme die erste und letzte einmal, alle ungeraden doppelt und alle graden viermal, so entsteht hiedurch eine zweite Reihe von Zahlen. Mit dieser zweiten Reihe von Zahlen verbinde man die Reihe natürlicher Zahlen 0, 1, 2, 3, .... und multiplizire solche mit den nebenstehenden Ordinaten, so erhält man eine dritte Reihe. Die Summe der dritten Reihe durch die der zweiten dividirt, und mit dem Abstände zweier auf einander folgenden Ordinaten multipliziert, giebt den Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate.

Beispiel. Die Linie  $AG = 4,5$  sey in sechs gleiche Theile getheilt, also  $\alpha = 0,75$ . Ferner sey 8,66; 12,247; 15,000; 17,321; 19,365; 21,213; 22,913 die Ordnung der auf einander folgenden Ordinaten, so erhält man:

## II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren. 179

<u>erste Reihe</u>	<u>zweite Reihe</u>	<u>britte Reihe</u>
8,660 . 1 . . . .	8,660 . 0 . . . .	0,000
12,247 . 4 . . . .	48,988 . 1 . . . .	48,988
15,000 . 2 . . . .	30,000 . 2 . . . .	60,000
17,321 . 4 . . . .	69,284 . 3 . . . .	207,852
19,365 . 2 . . . .	38,730 . 4 . . . .	154,920
21,213 . 4 . . . .	84,852 . 5 . . . .	424,260
22,913 . 1 . . . .	22,913 . 6 . . . .	137,478
	<u>303,427</u>	<u>1033,498</u>

also ist der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate

$$= \frac{0,75 \cdot 1033,498}{303,427} = 2,554.$$

Wird vorausgesetzt, daß die Linien  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$ , ... grade sind, so erhält man nach §. 114. für eben dieß Beispiel, aber weniger genau 2,539 statt 2,554, so daß der Unterschied = 0,016 ist.

\* §. 127.

**Zusatz.** Wird die erste oder letzte Ordinate = 0, so bleibt die Rechnung ungedändert, nur daß man  $a$  oder  $g = 0$  nehmen, übrigens aber dieselbe Ordnung bei der Auflösung befolgen muß. Dasselbe gilt von jeder andern Ordinate, wenn solche = 0 wird. Wären  $a$  und  $g = 0$ , so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate

$$= a \cdot \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 4b + 2 \cdot 2c + 3 \cdot 4d + 4 \cdot 2e + 5 \cdot 4f + 6 \cdot 0}{0 + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + 0}.$$

**Anmerkung.** Die hier gegebene Verfahrensart, den Inhalt und den Schwerpunkt einer jeden unregelmäßigen Fläche zu finden, ist noch genauer wie die §. 114. beschriebene. Von diesem zuerst von Thomas Simpson in dessen Mathematical dissertations, London 1743. gelehrten Ver-

fahren, hat der Viceadmiral v. Chapman in seinem in schwedischer Sprache herausgegebenen Werke über den Bau der Schiffe (*Traité de la construction des vaisseaux; trad. du suédois de M. Chapman, par Vial de Clairbois. Brest 1781.*) Gebrauch gemacht. Sowohl *Levéque* (in den *Noten zum Examen maritime, par Don G. Juan, T. II. Paris 1792. p. 88.*) als *Prony* (*Nouv. Arch. Hydr. T. I. §. 223.*) haben ebenfalls dieses Verfahren auseinandergesetzt. Allgemeinere Untersuchungen den Inhalt einer Fläche mittelst Ordinaten zu bestimmen, findet man in meinen *Grundlehren der höhern Analysis, §. 1059. und 1060.*

### III. Vom Schwerpunkte der Körper.

#### §. 128.

Zaf. II.  
Fig. 50.

Wenn  $ABC$ , Figur 50., der Durchschnitt eines Körpers ist, und die grade Linie  $AD$  geht durch die Schwerpunkte aller mit  $BC$  parallelen Flächen, so muß auch der Schwerpunkt des ganzen Körpers in  $AD$  liegen, daher ist  $AD$  ein Durchmesser der Schwere. Entsteht ein Körper durch Umdrehung einer Fläche um eine Ase, so ist diese zugleich ein Durchmesser der Schwere.

Eine Ebene, welche einen Körper so in zwei Theile theilt, daß auf entgegengesetzten Seiten dieser Ebene jede gleich weit von derselben abstehende mit der Ebene parallele Querschnitte des Körpers einander gleich sind, ist eine Ebene der Schwere, weil unter allen gleichgroßen mit der Ebene parallelen Scheiben ein Gleichgewicht vorhanden ist.

Der Schwerpunkt von einer Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte, und von einem Cylinder in der Mitte der Ase.

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 181

Der Schwerpunkt von jedem Prismen wird gefunden, wenn man den Schwerpunkt der obern und untern Fläche des Prismen mit einer Linie verbindet, und davon die Mitte nimmt.

§. 129.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide zu finden.

**Auflösung.** Man suche den Schwerpunkt F, Figur 72., der Grundfläche BCD, so ist AF ein Durchmesser der Schwere (§. 79.). Eben so wenn H der Schwerpunkt der Fläche ACD ist, welche man ebenfalls als Grundfläche ansehen kann, so ist BH ein Durchmesser der Schwere von der Pyramide. Nun liegen AF und BH in einerlei Ebene ABE, daher der Durchschnittspunkt G dieser Linien der Schwerpunkt der Pyramide ist. Taf. III.  
Fig. 72.

Weil  $\triangle FGH \sim \triangle ABG$ , so verhält sich

$FH : AB = GF : AG$ , daher

$$AG = \frac{AB \cdot GF}{FH}.$$

Aber da  $EB = 3 \cdot EF$ , so ist auch  $AB = 3 \cdot FH$ , also

$$AG = \frac{3 \cdot FH \cdot GF}{FH} = 3 \cdot GF, \text{ folglich}$$

$$AF = 4GF \text{ oder}$$

$$AG = \frac{3}{4} AF.$$

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt also in derjenigen Linie, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche gezogen wird, um  $\frac{3}{4}$  dieser Linie, von der Spitze



entfernt, oder  $\frac{1}{4}$  ihrer Länge von der Grundfläche.

Der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche ist  $\frac{1}{4}$  von der Höhe der Pyramide.

§. 130.

1. Zusatz. Bei einer vielseitigen Pyramide liegt der Schwerpunkt in derjenigen Linie, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche gezogen wird; diese Linie ist also ein Durchmesser der Schwere. Theilt man die Pyramide in lauter dreiseitige, so steht jeder ihrer Schwerpunkte um  $\frac{1}{4}$  der Pyramidenhöhe von der Grundfläche, und eine Ebene mit der Grundfläche parallel geht durch sämtliche Schwerpunkte, ist also eine Ebene der Schwere, welche den Durchmesser der Schwere auf  $\frac{1}{4}$  seiner Länge im Schwerpunkte der ganzen Pyramide schneidet. Der Schwerpunkt einer jeden Pyramide ist daher  $\frac{1}{4}$  ihrer Höhe von der Grundfläche entfernt.

2. Zusatz. Eben so liegt der Schwerpunkt eines Kegels um  $\frac{1}{4}$  der Höhe desselben von der Grundfläche entfernt.

Bei den wenigsten Körpern kann der Schwerpunkt unmittelbar unterstützt werden. Wenn aber die vertikale Linie, welche von dem Schwerpunkte ab durch die Materie des Körpers geht, unterstützt wird, so muß der Körper in Ruhe bleiben.

§. 131.

Aufgabe. Von einer jeden willkürlich angenommenen Ebene, den Abstand des Schwerpunkts einer dreiseitigen Pyramide zu finden.

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 185

**Auflösung.** Es sey  $ABCD$ , Figur 73., die Pyramide, und  $XZ$  die gegebene von der Pyramide entfernte Ebene. Man ziehe aus den vier Ecken der Pyramide auf die Ebene  $XZ$  die winkelrechten Linien  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , setze diese Abstände  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , und lege durch  $A$  mit der Ebene  $XZ$  parallel eine Ebene  $AB''C''$ , welche die Abstände  $BB'$ ,  $CC'$  in  $B''$  und  $C''$  schneidet. Die Seite  $BC$  werde in  $E$  halbiert,  $AE$  gezogen,  $EF = \frac{1}{3} AE$  angenommen,  $DF$  gezogen, und es sey  $FG = \frac{1}{4} DF$ , so ist  $G$  der Schwerpunkt der Pyramide (§. 129.). Aus den Punkten  $E$ ,  $F$ ,  $G$  ziehe man auf die Ebene  $XZ$  die winkelrechten Linien  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ , wovon die beiden ersten die Ebene  $AB''C''$  in den Punkten  $E''$ ,  $F''$  schneiden, so müssen die Linien  $AA'$ ,  $FF'$ ,  $EE'$  in einerlei Ebene  $AA'E'E'$ , und die Linien  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $DD'$  in einerlei Ebene  $FF'DD'$  liegen. Nun ist  $BE = EC$ , also

$$EE' = \frac{BB'' + CC''}{2}. \text{ Aber } BB'' = b - a,$$

$$CC'' = c - a, \text{ daher } EE' = \frac{b + c - 2a}{2}.$$

Ferner ist  $AF = \frac{2}{3} AE$ , also auch

$$FF' = \frac{2}{3} EE' = \frac{b + c - 2a}{3}, \text{ daher}$$

$$FF' = FF'' + F''F' = FF'' + AA' = \frac{b + c - 2a}{3} + a$$

$$\text{oder } 3 \cdot FF' = a + b + c.$$

Man nehme  $DH = FF'$ , und ziehe  $F'H$ , so fällt  $F'H$  in die Ebene  $FF'DD'$ , und schneidet  $GG'$  in irgend einem Punkte  $K$ . Nun ist  $FG = \frac{1}{4} FD$ , also

Taf. III.  
Fig. 73.

$$F'K = \frac{1}{4} F'H, \text{ daher auch}$$

$$KG' = \frac{1}{4} D'H = \frac{DD' - DH}{4} = \frac{DD' - FF'}{4}. \text{ Aber}$$

$$GG' = GK + KG' = FF' + \frac{DD' - FF'}{4} = \frac{3 \cdot FF' + DD'}{4}$$

oder wenn man für  $3 \cdot FF'$  den Werth  $a + b + c$ ,  
und für  $DD'$  seinen Werth  $d$  setzt, so erhält man

$$GG' = \frac{a + b + c + d}{4},$$

oder man findet den Abstand des Schwerpunkts einer dreiseitigen Pyramide von irgend einer willkürlich angenommenen Ebene, wenn man die Abstände der vier Ecken dieser Pyramide von der Ebene sucht, und ihre Summe durch vier dividirt.

## §. 132.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer abgestürzten Pyramide zu finden.

**Auflösung.** Die abgestürzte Pyramide  $A E F H D$ ,  
 Taf. III. Figur 74., werde durch die fehlende  $I A B D$  ergänzt.  
 Fig. 74. Man ziehe nach dem Schwerpunkte  $L$  der Grundfläche die Axe  $IL$ , welche die Fläche  $ABD$  in  $K$  schneidet, so ist  $IL$  ein Durchmesser der Schwere, in welchem die Schwerpunkte  $g, G, G'$ , der fehlenden, abgestürzten und ganzen Pyramide liegen. Man bezeichne durch  $P, Q$  die Inhalte der fehlenden und abgestürzten Pyramide, so ist, wegen des Gleichgewichts,

$$IG' (P + Q) = Ig \cdot P + IG \cdot Q.$$

Wird nun durch

$a = KL$  die Länge der Axe für die abgestürzte Pyramide, und durch

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 185

$S = EF$ ,  $s = AB$  die Längen zweier ähnlich liegenden Seiten in den parallelen Flächen der abgekürzten Pyramide bezeichnet

so verhält sich

$$IK : KL = s : S - s, \text{ daher}$$

$$IK = \frac{s^2}{S - s}, \text{ also}$$

$$Ig = \frac{3}{4} IK = \frac{3}{4} \cdot \frac{s^2}{S - s}. \text{ Ferner verhält sich}$$

$$IL : KL = S : S - s, \text{ daher}$$

$$IL = \frac{sS}{S - s}, \text{ also}$$

$$IG' = \frac{3}{4} IL = \frac{3}{4} \cdot \frac{sS}{S - s}. \text{ Auch ist}$$

$$IG = IL - LG = \frac{sS}{S - s} - LG.$$

Auch verhält sich

$$P : Q = s^3 : S^3 - s^3, \text{ daher ist}$$

$$P = \frac{s^3 Q}{S^3 - s^3}.$$

Setzt man die Werthe für  $Ig$ ,  $IG'$ ,  $IG$  und  $P$  in die zuerst gefundene Gleichung, dividirt durch  $Q$ , und bringt  $LG$  auf eine Seite, so wird

$$LG = \frac{s}{4} \cdot \frac{S^4 - 4s^3 S + 3s^4}{(S - s)(S^3 - s^3)}.$$

Aber  $S^3 - s^3 = (S - s)(S^2 + sS + s^2)$  und  $S^4 - 4s^3 S + 3s^4 = (S - s)^2(S^2 + 2sS + 3s^2)$  daher erhält man, wenn diese Werthe in die Gleichung gesetzt werden, nach gehöriger Abkürzung, die Entfernung des Schwerpunktes der abgekürzten Pyramide von der Grundfläche, in derjenigen Linie gemessen, welche die Schwerpunkte der beiden parallelen Flächen mit einander verbindet, oder

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2}{S^2 + sS + s^2}.$$

Weil  $KG = KL - LG$  ist, so erhält man auch

$$KG = \frac{a}{4} \cdot \frac{3S^2 + 2sS + s^2}{S^2 + sS + s^2}.$$

§. 133.

**Zusatz.** Für den abgekürzten Kegel gelten die vorherigen Schlüsse, wenn der Durchmesser der untern Kreisfläche  $D = S$ , und der obern  $d = s$  gesetzt wird. Alsdann ist wie vorher

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{D^2 + 2dD + 3d^2}{D^2 + dD + d^2}$$

$$\text{oder } KG = \frac{a}{4} \cdot \frac{3D^2 + 2dD + d^2}{D^2 + dD + d^2}.$$

Für  $D = d$  erhält man  $LG = \frac{1}{2} a$  wie §. 128.

§. 134.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer ausgehöhlten abgekürzten Pyramide zu finden.

**Auflösung.** Vorausgesetzt, daß die Aushöhlung Taf. III. abdhfe, Figur 75., prismatisch, und die Schwer-  
Fig. 75. punkte K, L der obern und untern Fläche mit den der abgekürzten Pyramide zusammenfallen, so sey G der Schwerpunkt des ausgehöhlten Körpers, G' der Schwerpunkt der vollen abgekürzten Pyramide, und g der Aushöhlung. Sind nun Q, R die Inhalte der beiden letztern Körper, so ist  $Q - R$  der Inhalt der ausgehöhlten Pyramide, und das Moment der vollen abgekürzten Pyramide muß den Momenten der beiden Körper, woraus sie bestehet, gleich seyn, also

$$LG \cdot (Q - R) + Lg \cdot R = LG' \cdot Q \text{ oder}$$

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 187

$$LG = \frac{LG' \cdot Q - Lg \cdot R}{Q - R}.$$

Ist nun die Grundfläche  $efh$  der Aushöhlung der Grundfläche  $EFH$  der Pyramide ähnlich, und man setzt die ähnlichliegenden Seiten

$EF = S$ ,  $AB = s$ ,  $ef = \sigma$ ; ist ferner

$h$  die winkelrechte Höhe der abgefürzten Pyramide,

$a = KL$  die Länge der Axe,

$F$  der Inhalt der Grundfläche  $EFH$ , so ist nach bekannten Regeln der Geometrie, der Inhalt der abgefürzten Pyramide  $ADHE$ , oder

$$Q = \frac{h F}{3 S^2} (S^2 + sS + s^2)$$

und weil die Grundfläche  $efh$  von der Aushöhlung  $= \frac{\sigma^2}{S^2} F$  ist, so wird

$$R = h \cdot \frac{\sigma^2}{S^2} F, \text{ also}$$

$$Q - R = \frac{h F}{3 S^2} (S^2 + sS + s^2 - 3\sigma^2).$$

Ferner ist (§. 128.)  $Lg = \frac{1}{2} a$  und (§. 132.)

$$LG' = \frac{a}{4} \cdot \frac{s^2 + 2sS + 3s^2}{s^2 + sS + s^2}.$$

Setzt man diese Werthe von  $Q$ ,  $R$ ,  $Lg$ ,  $LG'$  in die für  $LG$  gefundene Gleichung, so findet man, nach gehöriger Abkürzung, die Entfernung des Schwerpunkts von der Grundfläche für die ausgehöhlte Pyramide, oder

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{s^2 + 2sS + 3s^2 - 6\sigma^2}{s^2 + sS + s^2 - 3\sigma^2}.$$

§. 135.

1. Zusatz. Für einen ausgehöhlten abgefürzten Kegel wird der Abstand des Schwerpunkts eben

so gefunden, wenn man im vorstehenden Ausdrucke, statt der ähnlich liegenden Seiten, die zugehörigen Durchmesser setzt.

## §. 136.

2. Zusatz. Ist die abgekürzte Pyramide so weit ausgehöhlt, daß der Querschnitt der Ausböhlung der obern Fläche ABD der abgekürzten Pyramide gleich ist, so wird  $s = \sigma$ , also

$$\begin{aligned} LG &= \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS - 3s^2}{S^2 + sS - 2s^2} = \frac{a}{4} \cdot \frac{(S^2 - s^2) + 2s(S - s)}{(S^2 - s^2) + s(S - s)} \\ &= \frac{a}{4} \cdot \frac{(S - s)(S + s + 2s)}{(S - s)(S + s + s)} \end{aligned}$$

und man findet den Abstand

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S + 3s}{S + 2s} = \frac{a}{4} \left[ 1 + \frac{s}{S + 2s} \right].$$

Für  $S = s$  wird der Inhalt des ausgehöhlten Körpers oder  $Q - R = 0$ , aber  $LG = \frac{1}{2}a$ . Dies zeigt an, daß der Schwerpunkt eines auf die beschriebene Art ausgehöhlten Körpers nie weiter als um den dritten Theil der Axe von der Grundfläche entfernt seyn kann, oder alle mögliche Schwerpunkte so ausgehöhlter Körper müssen innerhalb der Grenze  $\frac{1}{3}a$  liegen.

Beispiel. Für  $a = 10$ ,  $S = 10$ ,  $s = 4$  ist

$$LG = \frac{10 \cdot 22}{4 \cdot 18} = 3,05555.$$

Für  $a = 10$ ,  $S = 10$ ,  $s = 9$  ist

$$LG = \frac{10 \cdot 37}{4 \cdot 28} = 3,30303.$$

Für  $a = 10$ ,  $S = 1000$ ,  $s = 999$  ist

$$LG = \frac{10 \cdot 3997}{4 \cdot 2998} = 3,33305$$

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 189

also in allen Fällen kleiner als

$$\frac{2}{3} a = 3,3333.$$

§. 137.

**Aufgabe.** Von einem schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismen den Abstand seines Schwerpunktes von der Grundfläche zu finden.

**Auflösung.** Es sey  $ABCC'B'A'$ , Figur 76., das gegebene Prismen, aus dessen obersten Ecken A, B, C man auf die nöthigenfalls erweiterte Grundfläche  $A', B', C'$  winkelrechte Linien ziehen kann, wodurch der Abstand dieser Ecken von der Grundfläche  $A'B'C'$  bestimmt wird. Man setze diese Abstände, für A  $= a$ , für B  $= b$ , für C  $= c$ ; lege durch A eine Ebene  $AB'C'$  mit der Grundfläche parallel, so ist, wenn man die Grundfläche  $A'B'C' = F$  setzt, auch  $AB'C' = F$ . Ferner werde durch die Punkte A, B, C eine Ebene gelegt, so ist der ganze Körper  $ABCC'B'A'$  in ein Prismen  $A'B'C'C''B'A$  und in zwei Pyramiden  $AB'C''B$  und  $ABC''C$  eingetheilt. Nun findet man den Inhalt vom Prismen  $A'B'C'C''B'A' = aF$  den Inhalt der Pyramide  $AB'C''B = \frac{1}{3} (b - a) F$ . Es verhält sich aber der Inhalt der

$$\begin{aligned} \text{Pyr. } AB'C''B : \text{Pyr. } ABC''C &= \triangle B'C''B : \triangle BC''C \\ &= B'B : C'C \\ &= b - a : c - a \end{aligned}$$

folglich

$$\text{Pyr. } ABC''C = \frac{c - a}{b - a} \cdot \text{Pyr. } AB'C''B = \frac{1}{3} (c - a) F;$$

daher ist der Inhalt des ganzen Körpers  $ABCC'B'A'$

Kaf. III.  
Fig. 76.



$$= aF + \frac{1}{3}(b-a)F + \frac{1}{3}(c-a)F = \frac{a+b+c}{3} \cdot F.$$

Sucht man die Abstände der Schwerpunkte von der Grundfläche  $A'B'C'$  für jeden einzelnen Körper, so ist dieser

Abstand für das Prisma  $A'B'C'C''B''A'' = \frac{1}{2}a$  (§. 128.)

Abstand für die Pyramide  $AB''C''B = \frac{3a+b}{4}$  (§. 131.)

Abstand für die Pyramide  $ABC''C = \frac{2a+b+c}{4}$  (§. 131.)

Das Moment des ganzen Körpers muß der Summe der Momente der einzelnen Körper gleich seyn. Setzt man daher, daß  $u$  den Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche für den ganzen Körper bezeichnet, so erhält man

$$u \cdot \frac{a+b+c}{3}F = \frac{1}{2}a \cdot aF + \frac{3a+b}{4} \cdot \frac{b-a}{3} \cdot F + \frac{2a+b+c}{4} \cdot \frac{c-a}{3} \cdot F.$$

Hieraus findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche für das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma, oder

$$u = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{4(a+b+c)}.$$

§. 138.

Zusatz. Für  $b = c$  wird

$$(I) \quad u = \frac{a^2 + 3b^2 + 2ab}{4(a+2b)}.$$

Für  $a = 0$  wird

$$(II) \quad u = \frac{b^2 + c^2 + bc}{4(b+c)}.$$

Für  $a = 0$  und  $b = c$  ist

$$(III) \quad u = \frac{2}{3}b.$$

§. 139.

**Aufgabe.** Von einem schief abgeschnittenen Parallelepipeden  $ACB'D'$ , Figur 77., den Abstand seines Schwerpunkts von der Grundfläche  $A'B'D'$  zu finden. Taf. III.  
Fig. 77.

**Auflösung.** Man setze die Abstände der Ecken  $A, B, C, D$  von der Grundfläche  $A'B'D' = a, b, c, d$ , und theile das Parallelepipeden durch die Ebene  $AA'C'C$  in zwei dreieckigte schief abgeschnittene Prismen. Der gesuchte Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche sey  $= u$ , und man setze die Fläche  $A'B'C' = A'C'D' = F$ , so ist der Inhalt vom schief abgeschnittenen

$$\text{Prismen } ABCB' = \frac{a + b + c}{3} F$$

$$\text{Prismen } ACDD' = \frac{a + c + d}{3} F$$

$$\text{Parallelepipeden } BDD'B' = \frac{2a + b + 2c + d}{3} F$$

und daher, nach §. 137. wenn man die Momente auf die Ebene  $B'D'$  bezieht, das Moment vom

$$\text{Prismen } ABCB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{4(a + b + c)} \cdot \frac{a + b + c}{3} F$$

$$\text{Prismen } ACDD' = \frac{a^2 + c^2 + d^2 + ac + ad + cd}{4(a + c + d)} \cdot \frac{a + c + d}{3} F$$

$$\text{Parallelepipeden } BDD'B' = u \cdot \frac{2a + b + 2c + d}{3} F.$$

Nun muß dies letzte Moment den beiden ersten gleich seyn, daher erhält man

$$\begin{aligned} & u(2a + b + 2c + d) \\ &= \frac{1}{4}(2a^2 + b^2 + 2c^2 + d^2 + ab + 2ac + ad + bc + cd). \end{aligned}$$

Es ist aber nach den Eigenschaften der Figur

$$a + c = b + d, \text{ also } d = a + c - b.$$

Setzt man die Werthe für  $b + d$ , und  $d$  in die vorstehende Gleichung, und entwickelt  $u$ , so erhält man den gesuchten Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche  $A'B'C'D'$  oder

$$u = \frac{2a^2 + b^2 + 2c^2 + 3ac - b(a + c)}{6(a + c)}.$$

### §. 140.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer Halbkugel zu finden.

**Auflösung.** Um die Halbkugel  $ADB$ , Figur 78., werde ein Cylinder  $A E F B$  beschrieben, dessen Axe  $CD$  ist, so ist der Körper  $E A D B F$ , welcher die krumme Oberfläche der Halbkugel einschließt, einem Regel  $E C F$  gleich, der mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und alle mit der Grundfläche  $AB$  parallele Querschnitte dieses Körpers und des Regels sind einander gleich, wenn sie von  $AB$  gleichen Abstand haben, daher haben beide Körper einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt in  $g$ , wo  $Cg = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} r$  (§. 130.) ist, wenn  $r$  den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Mit der Halbkugel werde der Cylinder  $ABKI = A E F B$  verbunden, so ist  $CH = r$ , und wenn  $G'$  der Schwerpunkt dieses Cylinders ist,  $CG' = \frac{1}{2} r$ . Das Gewicht des Cylinders  $ABKI$  sey  $P$ , so ist das der Halbkugel  $= \frac{2}{3} P$ , und des Körpers  $E A D B F = \frac{1}{3} P$ , (weil er mit dem Regel gleichen Inhalt hat). Für die feste Axe  $DH$  entsteht ein

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 193

Gleichgewicht, wenn der Punkt C unterstützt wird; ist nun G der Schwerpunkt der Halbkugel, so müssen die Momente des Körpers EADB und der Halbkugel, welche beide den Cylinder AEFB ausmachen, dem Momente des Cylinders ABIK gleich seyn, also

$$\frac{1}{3} P \cdot Cg + \frac{2}{3} P \cdot CG = P \cdot CG', \text{ oder}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} r + \frac{2}{3} \cdot CG = \frac{1}{2} r, \text{ daher}$$

$$CG = \frac{3}{8} r.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkte der Halbkugel beträgt daher  $\frac{3}{8}$  des Halbmessers.

Uebrigens stimmt dieses Resultat mit dem §. 138. III. genau überein.

#### §. 141.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer ausgehöhlten halben Kugel oder eines Kugelgewölbes zu finden.

**Auflösung.** Es sey C, Figur 79., der Mittelpunkt für die Halbkugel ADB und für die kugelförmige Aushöhlung adb. In der Linie CD, welche auf der Grundfläche AB winkeltrecht ist, liegen die Schwerpunkte g, G', G von der Aushöhlung adb, der vollen Halbkugel und dem Kugelgewölbe. Ferner sey der Inhalt der vollen Halbkugel ADB = P, der Aushöhlung adb = p; also des Gewölbes P — p, und die Halbmesser

$$AC = CD = R; ac = cd = r,$$

so erfordert das Gleichgewicht an der Ase CD

$$Cg \cdot p + CG \cdot (P - p) = CG' \cdot P, \text{ also}$$

$$CG = \frac{CG' \cdot P - Cg \cdot p}{P - p}.$$

Es verhält sich  $P : p = R^3 : r^3$ , also ist

$$p = P \frac{r^3}{R^3}. \text{ Ferner ist (§. 140.)}$$

$$CG' = \frac{3}{8} R; Cg = \frac{3}{8} r.$$

Setzt man die Werthe von  $p$ ,  $CG'$ ,  $Cg$  in die für  $CG$  gefundene Gleichung, so wird der Abstand des Schwerpunkts eines Kugelgewölbes vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

\* §. 142.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines jeden Körpers, dessen Gestalt durch irgend eine Gleichung gegeben ist, zu finden.

**Auflösung.** Für irgend einen Körper  $ANM$ ,  
 Taf. III. Figur 80., sey  $AP$  die Abscissenaxe, und für  $AP = x$   
 Fig. 80. der auf der Axe  $AP$  winkelrechte Querschnitt  $NM = N$ .  
 Ist nun  $AG = u$  der Abstand des Schwerpunkts vom Anfangspunkte  $A$  der Abscissen für den Körper  $AMN$ , dessen Inhalt  $= Q$  gesetzt wird, so muß, wenn  $x$  um  $\partial x$  wächst, der Inhalt  $Q$  um das Element  $\partial Q = N \partial x$  wachsen. Das Moment dieses Elements für den Punkt  $A$  ist  $x \partial Q = N x \partial x$ , und weil die Summe aller Momente dem Momente des ganzen Körpers gleich seyn muß, so erhält man

$$uQ = \int x \partial Q = \int N x \partial x$$

folglich den Abstand des Schwerpunkts von  $A$ , oder

$$u = \frac{\int x \partial Q}{Q} = \frac{\int N x \partial x}{\int N \partial x}$$

weil der Inhalt,  $Q = \int N \partial x$  ist.

Bestimmt man durch dasselbe Verfahren den Abstand des Schwerpunkts noch für zwei andere Punkte wie A, so ist dadurch für jeden gegebenen Körper die Lage des Schwerpunkts gefunden.

\* §. 143.

1. Zusatz. Wäre der gegebene Körper ein Konoid, dessen Aze die Linie AP ist, so liegt der Schwerpunkt in der Aze AP, und man hat daher nur nöthig, den Abstand  $AG = u$  zu suchen, so ist dadurch die Lage des Schwerpunkts bekannt. Weil aber für ein Konoid der Querschnitt MN eine Kreisfläche ist, so setze man  $PM = y$ , so ist  $N = \pi y^2$ , also  $\partial Q = \pi y^2 \partial x$ , daher der Abstand AP, oder

$$u = \frac{\pi \int x y^2 \partial x}{Q} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}.$$

\* §. 144.

2. Zusatz. Sucht man den Schwerpunkt von dem Ausschnitt eines Konoids, wenn vorausgesetzt wird, daß die Schnitte durch die Aze AP geführt werden, so ist sowohl die Grundfläche  $PMM'$ , Figur 81., eines solchen Körpers, als auch jeder andere auf der Aze AP winkelrechte Querschnitt ein Kreisausschnitt, dessen Mittelpunkt in die Aze AP fällt. Für  $AP = x$ ,  $PM = PM' = y$  sey die Fläche  $PMM' = N'$ , der Inhalt des Körpers  $APMM'A = Q'$ , und sein Schwerpunkt G liege in einer auf der Aze AP win-

Taf. III.  
Fig. 81.

senkrechten Ebene  $FSS'$ , welche diese Arc im Punkte  $F$  schneidet, so erhält man wie vorhin, wenn  $AF = u$  gesetzt wird, den Abstand  $AF$  oder

$$(I) \quad u = \frac{\int x \partial Q'}{Q'} = \frac{\int N' x \partial x}{\int N' \partial x}.$$

Man theile den Bogen  $MM'$  in zwei gleiche Theile  $MQ, QM'$ , lege durch  $A, P, Q$  eine Ebene, so theilt solche den Körper  $APMM'$  in zwei gleiche Theile, folglich muß der Schwerpunkt  $G$  in derselben liegen (§. 80.). Daher ist der Durchschnitt  $FR$ , in welchem sich die Ebenen  $APQ$  und  $FSS'$  schneiden, ein Durchmesser der Schwere des ganzen Körpers. Für jeden Querschnitt wie  $PMM'$  sey  $g$  der Schwerpunkt der Fläche desselben, so ist wenn  $\alpha$  den Neigungswinkel der beiden Ebenen  $APM, APM'$  bezeichnet, der Winkel  $MPM' = \alpha$ , daher §. 108. der Abstand des Schwerpunkts der Fläche  $PMM'$  von  $P$  oder

$$Pg = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha}{3 \text{ Arc } \alpha} \cdot y.$$

Nun ist ferner die Fläche  $PMM' = N' = \frac{1}{2} \alpha y^2$ , also das Körperelement  $\partial Q' = N' \partial x = \frac{1}{2} \alpha y^2 \partial x$ , das Moment dieses Elements =

$$Pg \cdot \partial Q' = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha}{3 \text{ Arc } \alpha} \cdot y \partial Q'$$

und, wenn man für den Schwerpunkt  $G$  des Körpers  $APMM'$  den Abstand  $FG = u'$  setzt, so erhält man  $u' \cdot Q' = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha}{3 \text{ Arc } \alpha} \int y \partial Q'$ , folglich den Abstand  $FG$  oder

$$(II) \quad u' = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha \int y \partial Q'}{3 \text{ Arc } \alpha \cdot Q'} = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha \int N' y \partial x}{3 \text{ Arc } \alpha \cdot \int N' \partial x}$$

oder auch

$$u' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \int y^3 \partial x}{3 Q'} = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha \int y^3 \partial x}{3 \text{Arc } \alpha \cdot \int y^2 \partial x}.$$

Weil  $N' = \frac{1}{2} \alpha y^2$  ist, so erhält man auch noch aus (I)  $AF$ , oder

$$u = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}$$

eben so wie im vorhergehenden §.

\* §. 145.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Kugelabschnitts vom Scheitel desselben zu finden.

**Auflösung.** Für die Kugel, deren Halbmesser  $r$  ist, erhält man  $y^2 = 2rx - x^2$ , also

$$\int y^2 \partial x = \int (2rx - x^2) \partial x = rx^2 - \frac{1}{3} x^3, \text{ und}$$

$$\int x y^2 \partial x = \int (2rx^2 - x^3) \partial x = \frac{2}{3} rx^3 - \frac{1}{4} x^4$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit  $x = 0$  verschwindet. Man erhält daher §. 142. den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8r - 3x}{12r - 4x} \cdot x.$$

Für die Halbkugel wird  $x = r$  also  $u = \frac{5}{8} r$ .

**Beispiel.** Der Halbmesser der Kugel sey 9 Fuß, und die Höhe des Abschnitts = 4 Fuß, so erhält man den Abstand

$$u = \frac{72 - 12}{108 - 16} \cdot 4 = 2\frac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

\* §. 146.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Kugelabschnitts zu finden.



**Auflösung.** Nach §. 144. ist, wie im vorigen  
 Taf. III. §., der Abstand AF, Figur 81., oder  
 Fig. 81.

$$(I) \quad u = \frac{8r - 3x}{12r - 4x} x.$$

Ferner ist  $y^3 \partial x = (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} \partial x$ . Aber (P. A. S. 146. III.)

$$\int y^3 \partial x = \frac{-(r-x)y^3}{4} + \frac{3r^2}{4} \int y \partial x. \text{ Ferner}$$

$$\int y \partial x = \int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} \text{ daher, wie §. 120.,}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \text{ Arc sinvs } \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (r - x) y \text{ also}$$

$$\int y^3 \partial x = \frac{3r^4}{8} \text{ Arc sinvs } \frac{x}{r} - \frac{(r-x)y}{4} (y^2 + \frac{3}{2} r^2).$$

Wenn daher der Winkel  $\alpha$  die §. 144. gegebene Bedeutung erhält, und  $Q'$  den körperlichen Inhalt des Ausschnitts bezeichnet, so ist §. 144. (II) der Abstand des Schwerpunkts von der Axe

$$(II) \quad u' = \frac{3r^4 \text{ Arc sinvs } \frac{x}{r} - y(r-x)(2y^2 - 3r^2)}{12 Q'} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

\* §. 147.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines parabolischen Konoids zu finden.

**Auflösung.** Die Gleichung für die Parabel ist  $y^2 = ax$ . Man erhält daher

$$\int x y^2 \partial x = \int a x^2 \partial x = \frac{1}{3} a x^3, \text{ wo keine Constante hinzukommt. Ferner ist}$$

$$\int y^2 \partial x = \int a x \partial x = \frac{1}{2} a x^2, \text{ daher §. 142.}$$

der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 199

$$u = \frac{\frac{1}{2} a x^2}{\frac{1}{2} a x^2} = \frac{2}{3} x$$

der Schwerpunkt eines parabolischen Konoids ist daher um  $\frac{2}{3}$  der Ape vom Scheitel entfernt.

\* §. 148.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt von dem Ausschnitte eines parabolischen Konoids zu finden.

**Auflösung.** Der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel ist wie im vorigen §.

$$(I) \quad u = \frac{2}{3} x.$$

Ferner erhält man

$$\int y^2 \partial x = \frac{1}{2} a x^2 = \frac{y^4}{2a}, \text{ und weil } \partial x = \frac{2y \partial y}{a} \text{ ist,}$$

$$\int y^3 \partial x = \int \frac{2y^4 \partial y}{a} = \frac{2y^5}{5a}$$

daher findet man, wenn  $\alpha$  den Winkel des Ausschnitts bezeichnet, §. 144. den Abstand des Schwerpunkts von der Ape, oder

$$u' = \frac{16 y \sin \frac{1}{2} \alpha}{15 \text{ Arc } \alpha}.$$

\* §. 149.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines hyperbolischen Konoids zu finden.

**Auflösung.** Die Gleichung für die Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) \text{ also}$$

$$\int x y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2} (2ax^2 + x^3) \partial x = \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{2}{3} a x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right).$$

Ferner ist

$$\int y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) \partial x = \frac{b^2}{a^2} \left( a x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right)$$

daher §. 142. der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \cdot x,$$

\* §. 150.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines elliptischen Konoids zu finden, dessen Scheitel in die große Axe fällt.

**Auflösung.** Wenn  $a$  den Halbmesser der großen, und  $b$  der kleinen Axe bezeichnet, so ist alsdann die Gleichung für die Ellipse  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$ , daher

$$\int x y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2} (2ax^2 - x^3) \partial x = \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{2}{3} a x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right).$$

Ferner

$$\int y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \partial x = \frac{b^2}{a^2} \left( a x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right)$$

daher §. 142. der Abstand vom Scheitel, oder

$$(I) \quad u = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \cdot x.$$

Für die halbe Ellipse wird  $x = a$ , also

$$(II) \quad u = \frac{5}{8} a.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts vom Scheitel eines halben elliptischen Konoids beträgt daher wie bei der Halbkugel  $\frac{5}{8}$  der halben Axe.

**Zusatz.** Fällt der Scheitel des elliptischen Konoids in das Ende der kleinen Axe, so ist die Gleichung für die Ellipse  $y^2 = \frac{a^2}{b^2} (2bx - x^2)$ , und man erhält alsdann den Abstand

$$(III) \quad u = \frac{8b - 3x}{12b - 4x} \cdot x.$$

\* §. 151.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kettenkno-  
noids zu finden.

Auflösung. Es sey wie §. 125.  $v^2 = 2cx + x^2$   
die Gleichung für die Kettenlinie. Nun ist (P. A.  
S. 143.)

$$\int xy^2 \partial x = \frac{1}{2} x^2 y^2 - \int x^2 y \partial y \text{ und}$$

$$\int x^2 y \partial y = y \int x^2 \partial y - \int \partial y \int x^2 \partial y. \text{ Nach §.}$$

125. ist aber

$$\int x^2 \partial y = \frac{1}{2} cxv - \frac{3}{2} c^2 v + \frac{3}{2} c^2 y, \text{ daher}$$

$$\partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{2} cxv \partial y - \frac{3}{2} c^2 v \partial y + \frac{3}{2} c^2 y \partial y$$

und weil (§. 91. Anhang)  $v \partial y = c \partial x$  ist, so er-  
hält man auch

$$\partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{2} c^2 x \partial x - \frac{3}{2} c^3 \partial x + \frac{3}{2} c^2 y \partial y \text{ also}$$

$$\int \partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{4} c^2 x^2 - \frac{3}{2} c^3 x + \frac{3}{4} c^2 y^2 \text{ daher}$$

$$\int x^2 y \partial y = \frac{1}{2} cxyv - \frac{3}{2} c^2 yv + \frac{3}{2} c^2 y^2 - \frac{1}{4} c^2 x^2 + \frac{3}{2} c^3 x - \frac{3}{4} c^2 y^2$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2} cxyv - \frac{3}{2} c^2 yv + \frac{3}{4} c^2 y^2 - \frac{1}{4} c^2 x^2 + \frac{3}{2} c^3 x$$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks erhält man

$$\int xy^2 \partial x = \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{2} cxyv + \frac{3}{2} c^2 yv - \frac{3}{4} c^2 y^2 + \frac{1}{4} c^2 x^2 - \frac{3}{2} c^3 x.$$

Da nun §. 143.  $u = \frac{\pi \int xy^2 \partial x}{Q}$  und (§. 109. Anh.)

$Q = \pi [2c^2x + (c + x)y^2 - 2cyv]$  ist, so  
erhält man den Abstand des Schwerpunkts vom Schei-  
tel, oder

$$u = \frac{2x^2y^2 - 2cxyv + 6c^2yv - 3c^2y + c^2x^2 - 6c^3x}{4[2c^2x + y^2(c+x) - 2cyv]}.$$

## \* §. 152.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines jeden unregelmäßigen Körpers zu finden.

Zaf. III.  
Fig. 82.

**Auflösung.** Es sey  $AA'G'G$ , Figur 82., der gegebene Körper,  $AG$  eine grade Linie, welche in eine grade Anzahl gleicher Theile,  $AB, BC, CD, \dots$  eingetheilt ist. Durch jeden dieser Punkte denke man sich Ebenen  $BB', CC', DD', \dots$  welche auf  $AG$  winkelrecht stehen; auch soll dies von den äußersten Flächen  $AA', GG'$  gelten. Der Inhalt von der Fläche  $AA'$  sey  $= A$ , von  $BB' = B$ , von  $CC' = C, \dots$  und der Abstand zweier Flächen oder  $AB = BC = \dots$

Zaf. III.  
Fig. 83.

$= \alpha$ . Man nehme die Linie  $AG$ , Figur 83., eben so groß wie  $AG$ , Figur 82., und theile solche in eben so viel gleiche Theile  $AB = BC = \dots$ , errichte in  $A, B, C, \dots$  winkelrechte Linien, und setze die gefundenen Flächeninhalte  $A, B, C, \dots$  als abstracte Zahlen an, so kann man  $AA' = A, BB' = B, CC' = C, \dots$  nehmen, und der Flächeninhalt von dem Streifen  $AA'B'B$  wird alsdann durch eben die Größen ausgedrückt, welche den körperlichen Inhalt von der Scheibe  $AA'B'B$  angeben. Es ist daher der Ausdruck für den Inhalt der ganzen Fläche  $AA'G'G$  dem Ausdrucke für den Inhalt des Körpers  $AA'G'G$  gleich. Nun ist §. 126. der Inhalt von der Fläche  $AA'G'G$

$$= \frac{1}{3} \alpha (A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G)$$

daher ist, wenn  $Q$  den Inhalt des Körpers  $AA'G'G$  bezeichnet,

$$Q = \frac{1}{3} \alpha (A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G).$$

### III. Vom Schwerpunkte der Körper. 203

Eben so muß der Schwerpunkt des Körpers  $AA'G'G$  von der Ebene  $AA'$  eben den Abstand haben, welchen der Schwerpunkt der Fläche  $AA'G'G$  von der Linie  $AA'$  hat. Es sey daher  $u$  der Abstand des Schwerpunkts vom Körper  $AA'G'G$  von der Ebene  $AA'$ , so findet man nach §. 126.

$$u = \alpha \cdot \frac{0 \cdot A + 1 \cdot 4B + 2 \cdot 2C + 3 \cdot 4D + 4 \cdot 2E + 5 \cdot 4F + 6 \cdot G}{A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G}.$$

Wird  $A$  oder  $G$  oder irgend ein anderer Querschnitt  $= 0$ , so bleibt die gefundene Auflösung dieselbe, nur daß man statt dieser Ordinaten in die Gleichung 0 setzen muß. Hieraus folgt, daß es eben nicht nothwendig ist, daß die beiden Flächen  $AA'$ ,  $GG'$  mit einander parallel sind, weil die Auflösung auch dann noch dieselbe bleibt, und man den Schwerpunkt hinlänglich genau findet, wenn nur der Abstand  $\alpha$  zweier auf einander folgender Querschnitte klein genug angenommen wird.

Nimmt man drei Ebenen winkelmäßig auf einander an, so kann man nach der gefundenen Regel die Abstände des Schwerpunkts von diesen Ebenen finden, wodurch die Lage des Schwerpunkts bestimmt wird.

\* §. 153.

**Zusatz.** Wäre der gegebene Körper durch die Umdrehung einer Ebene  $AA''G''G$ , Figur 82., um ihre Axe  $AG$  entstanden, so sind alle auf der Axe  $AG$  winkelmäßig Querschnitte Kreisflächen, und wenn man die Halbmesser  $AA'' = a$ ,  $BB'' = b$ ,  $CC'' = c$ , .... setzt, so ist die Fläche  $A = \pi a^2$ ,  $B = \pi b^2$ , ....

Saf. III.  
Fig. 82.

daher erhält man, wenn diese Werthe in die für  $Q$  und  $u$  gefundene Ausdrücke eingeführt werden, den körperlichen Inhalt des durch Umdrehung irgend einer Ebene um ihre Seitenlinie entstandenen Konoide, oder

$$Q = \frac{1}{3} \pi a (a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + g^2)$$

und den Abstand des Schwerpunkts von der Fläche  $AA'$ , oder

$$u = a \cdot \frac{0 \cdot a^2 + 1 \cdot 4b^2 + 2 \cdot 2c^2 + 3 \cdot 4d^2 + 4 \cdot 2e^2 + 5 \cdot 4f^2 + 6 \cdot g^2}{a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + g^2}.$$

Beispiel. Den Abstand des Schwerpunkts eines Kugelabschnitts vom Scheitel zu finden, wenn die Höhe des Abschnitts  $= h$  und der zur Kugel gehörige Halbmesser  $= r$  ist.

Nimmt man an, daß die Höhe  $h$  in zwei gleiche Theile getheilt werden soll, so ist jeder Theil  $\alpha = \frac{1}{2} h$ . Werden diese Theile vom Scheitel an gerechnet, so ist für den ersten Querschnitt  $a^2 = 0$ , und es ist, wenn die Querschnitte mit der Grundfläche des Kugelabschnitts parallel genommen werden, für den zweiten und dritten Querschnitt

$$b^2 = 2r\alpha - \alpha^2$$

$$c^2 = 4r\alpha - 4\alpha^2$$

folglich der Abstand

$$u = \alpha \cdot \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 4(2r\alpha - \alpha^2) + 2 \cdot (4r\alpha - 4\alpha^2)}{0 + 4(2r\alpha - \alpha^2) + (4r\alpha - 4\alpha^2)}$$

und es wird, wenn man die Parenthesen auflöst und  $\alpha = \frac{1}{2} h$  setzt, der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8r - 3h}{12r - 4h} \cdot h$$

genau eben so wie §. 146., wodurch man sich von der Genauigkeit dieser Methode überzeugen kann.

#### §. 154.

Weil ein schwerer Körper nur dann in Ruhe bleibt, wenn derselbe in seinem Schwerpunkte unterstützt ist, oder sonst auf eine Art das Sinken des Schwerpunkts verhindert wird, so folgt daraus, daß in jeder an einem Faden aufgehängene Körper nur dann in Ruhe ist, wenn der Schwerpunkt des Körpers mit dem Faden in einerlei vertikale Linie fällt, weil nur unter diesen Umständen der Schwerpunkt am Sinken verhindert wird. Hängt ein Körper an zwei Fäden, welche sich in einem Aufhängepunkt vereinigen, so muß eine Vertikallinie durch den Aufhängepunkt zugleich durch den Schwerpunkt gehen.

Hiedurch erhält man ein leicht ausführbares praktisches Mittel, den Schwerpunkt eines jeden unregelmäßigen Körpers mittelst eines Fadens zu finden. Denn wenn man das eine Ende des Fadens mit dem Körper verbindet, und das andere an einem Aufhängepunkt so befestigt, daß der Körper frei herabhängen kann, so wird die verlängerte Richtung des Fadens einen Durchmesser der Schwere des Körpers geben. Wird nun der Faden an einem andern Theile des Körpers befestigt, so erhält man dadurch einen zweiten Durchmesser der Schwere, wodurch die Lage des Schwerpunktes bekannt ist.

Wäre der Körper so groß, daß man ihn nicht aufhängen kann, so könnte man einen viel kleinern ganz ähnlichen oder ein Modell verfertigen lassen, und von diesem Modell auf die angeführte Weise den Schwer-



punkt suchen, wodurch die Lage des Schwerpunkts für den großen Körper bekannt wird. Dies Verfahren erfordert aber eine außerordentliche Genauigkeit, besonders wenn nicht alle Theile des Körpers einerlei eigenthümliches Gewicht haben.

## §. 155.

Von einem jeden Körper, welcher durch Umdrehung irgend einer Fläche um eine Axe entsteht, kann man mit Hülfe des Schwerpunkts derjenigen Fläche, welche den Körper erzeugt, seinen Inhalt nach einer vom Pater Guldin gegebenen Regel (*Méthode centrobarique*) (\*) finden, wenn man den Weg, welchen der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche durchläuft, mit dem Inhalte dieser Fläche multiplicirt.

Zaf. III.  
Fig. 80.

Wäre  $APM$ , Figur 80., die erzeugende Fläche, und  $Gg = e$  der Abstand des Schwerpunkts dieser Fläche von der Axe  $AP$ , so ist  $2e\pi$  der Weg, welchen der Schwerpunkt  $g$  durchläuft, wenn sich die Fläche  $DEB = M$  um die Axe  $AP$  dreht, und einen Körper, dessen Inhalt  $Q$  ist, erzeugt. Aber §. 116.

$$e = \frac{\int y \partial M}{2M} \text{ oder } 2eM = \int y \partial M.$$

Nun ist der Inhalt des Körpers

$$Q = \int \pi y^2 \partial x = \pi \int y \partial M \text{ daher}$$

$$Q = 2\pi e \cdot M.$$

---

(\*) Pauli Guldini, de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae. Viennae. Lib. I. 1635. Lib. II. 1640.

# IV. Vom Schwerpunkte der Oberfläche eines Körpers.

§. 156.

Der Schwerpunkt von der Oberfläche eines Prismen oder Cylinders liegt in der Mitte derjenigen Axe, welche die Schwerpunkte von dem Umfange der Grundflächen mit einander verbindet.

Eine Ebene, welche durch die Mitte dieser Axe, mit einer der Grundflächen des Prismen parallel geht, schneidet sämtliche Parallelogramme seiner Außenfläche in ihren Schwerpunkten, und ist daher eine Ebene der Schwere. Nun verhalten sich die Linien vom Umfange der Durchschnittsebene wie die Gewichte der Parallelogramme, durch deren Schwerpunkte sie gehen, daher liegt der Schwerpunkt des ganzen Umfanges in der angegebenen Stelle.

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß der Schwerpunkt von der Oberfläche einer Pyramide, die Grundfläche nicht mit gerechnet, oder von der krummen Oberfläche eines Kegels,  $\frac{2}{3}$  von der Spitze derjenigen Linie gerechnet, liegen muß, welche den Schwerpunkt von dem Umfange der Grundfläche mit der Spitze verbindet.

§. 157.

Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines Kugelabschnitts liegt in der Mitte derjenigen Linie, welche vom Scheitel nach dem Mittelpunkte der Grundfläche des Abschnitts gezogen wird.

Taf. III.

Fig. 84.

Denn man vollende die Halbkugel  $EDF$ , Figur 84., welche zum Abschnitt  $ABD$  gehört, so ist, wenn  $EF$  mit  $AB$  parallel, und im Mittelpunkte  $C$  die Linie  $CD$  auf der Grundfläche  $EF$  winkelrecht steht,  $CD$  ein Durchmesser der Schwere für die krumme Oberfläche des Abschnitts. Um die Grundfläche  $EF$  der Halbkugel sey die krumme Oberfläche  $EIKF$  eines Cylinders gelegt, welcher auf dieser Grundfläche winkelrecht steht, und gleiche Höhe mit der Halbkugel hat, so ist ein jeder äußerst schmale Streifen  $Aa bB$  der krummen Oberfläche des Abschnitts einem Streifen  $A'a'b'B'$  der Cylinderfläche gleich, wenn beide gleich weit von der Grundfläche  $EF$  abstehen, und einerlei winkelrechte Höhe  $Hh$  haben, wie solches in der Geometrie bewiesen wird. Beide schmale Streifen haben also einerlei Gewicht, und da sie gleich weit vom Scheitel  $D$  abstehen, auch gleiche Momente von demselben. Dies gilt aber für jeden Streifen auf der Oberfläche des Abschnitts, es muß daher der Schwerpunkt von der Oberfläche des Kugelabschnitts  $ADB$  mit dem Schwerpunkte der Cylinderfläche  $A'B'KI$  überein kommen.

\* §. 158.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines jeden Konoids ganz allgemein zu bestimmen.

Taf. III.

Fig. 80.

**Auflösung.** Für das Konoid  $MAN$ , Figur 80., dessen Axe  $AP$  ist, sey  $AP = x$ ,  $PM = y$ , der Bogen  $AM = v$ , und die dazu gehörige krumme

#### IV. B. Schwärp. der Oberfl. eines Körpers. 209

Oberfläche =  $K$ . Wächst nun  $x$  um  $\partial x$ , so wächst  $v$  um  $\partial v$  und  $K$  um  $\partial K$  = Fläche  $MmnNM$ . Diese Fläche ist aber =  $2\pi y \partial v$  oder

$$\partial K = 2\pi y \partial v.$$

Das Moment dieser Fläche vom Scheitel  $A$  gerechnet ist

$$x \partial K = 2\pi xy \partial v.$$

Wäre daher  $G$  der Schwerpunkt von der ganzen Oberfläche, und  $AG = u$  sein Abstand vom Scheitel  $A$ , so ist die Summe aller Momente von  $x \partial K$  dem Momente der ganzen Fläche  $uK$  gleich, oder

$$uK = \int x \partial K = 2\pi \int xy \partial v$$

und weil  $K$  auch =  $2\pi \int y \partial v$  ist, so erhält man für den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel folgende Ausdrücke

$$u = \frac{\int x \partial K}{K} = \frac{2\pi \int xy \partial v}{K} = \frac{\int xy \partial v}{\int y \partial v}$$

wo  $\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2$  ist.

\* §. 159.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines Kettenkonoids zu finden.

**Auflösung.** Es ist (P. U. S. 143.)

$$\int xy \partial v = xyv - \int v \partial(xy) = xyv - \int yv \partial x - \int xv \partial y.$$

Nach §. 89. Anhang ist  $v \partial y = c \partial x$ , daher

$$\int xv \partial y = \int cx \partial x = \frac{1}{2} cx^2 \text{ und weil } v^2 = 2cx + x^2$$

ist, so wird

$$yv \partial x = yv \cdot \frac{v \partial y}{c} = \frac{y \partial y}{c} \cdot v^2 = 2xy \partial y + \frac{x^2 y \partial y}{c}, \text{ also}$$

$\int y v \partial x = 2 \int x y \partial y + \frac{1}{c} \int x^2 y \partial y$ . Nun ist §. 151.

$$\int x^2 y \partial y = \frac{1}{2} c x y v - \frac{3}{2} c^2 y v + \frac{3}{4} c^2 y^2 - \frac{1}{4} c^2 x^2 + \frac{3}{2} c^3 x$$

und ferner

$$\int x y \partial y = x \int y \partial y - \int \partial x \int y \partial y = \frac{1}{2} x y^2 - \int \frac{1}{2} y^2 \partial x.$$

Aber (§. 109. Anhang)

$$\int y^2 \partial x = 2 c^2 x + (c + x) y^2 - 2 c y v, \text{ also}$$

$$\int x y \partial y = \frac{1}{2} x y^2 - c^2 x - \frac{1}{2} (c + x) y^2 + c y v; \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} \int y v \partial x &= x y^2 - 2 c^2 x - (c + x) y^2 + 2 c y v + \frac{1}{2} x y v - \frac{3}{2} c y v \\ &\quad + \frac{3}{4} c y^2 - \frac{1}{4} c x^2 + \frac{3}{2} c^2 x \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} c y v - \frac{1}{2} c^2 x - \frac{1}{4} c y^2 + \frac{1}{2} x y v - \frac{1}{4} c x^2, \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} \int x y \partial v &= x y v - \frac{1}{2} c y v + \frac{1}{2} c^2 x + \frac{1}{4} c y^2 - \frac{1}{2} x y v + \frac{1}{4} c x^2 - \frac{1}{2} c x^2 \\ &= \frac{1}{2} x y v - \frac{1}{2} c y v + \frac{1}{2} c^2 x + \frac{1}{4} c y^2 - \frac{1}{4} c x^2. \end{aligned}$$

Nach §. 110. des Anhangs ist ferner  $K = 2\pi (y v - c x)$

daher findet man, weil  $u = \frac{2\pi \int x y \partial v}{K}$ , den Abstand

des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{2 c^2 x - c x^2 + c y^2 - 2 c y v + 2 x y v}{4 (y v - c x)}.$$


---

## Fünftes Kapitel.

### Von der Stabilität der Körper.

---

#### §. 160.

Ein jeder Körper, dessen Schwerpunkt unterstützt ist, und auf welchen keine andere Kräfte wirken, bleibt in Ruhe, und kann nicht umfallen. Es läßt sich aber die Frage aufwerfen, wie viel das Vermögen eines Körpers, mit welchem er dem Umfallen widersteht, größer ist als das eines andern, oder welcher von beiden die größte Standfähigkeit, Stabilität besitzt. Setzt man voraus, daß der Körper auf einem festen wagerechten Boden stehe, und durch eine an seinem Schwerpunkte angebrachte Kraft, deren Richtung mit dem Boden parallel geht, zwar umgeworfen aber nicht fortgeschoben werden kann, so nennt man diese zum Umwerfen nach irgend einer Seite der Grundfläche erforderliche Kraft, welche nur eben so groß genommen wird, als zur Ueberwältigung des aus dem Gewichte des Körpers entspringenden Widerstandes erforderlich ist, die Stabilität des Körpers nach dieser Seite.

Berührt der Körper mit seiner Grundfläche nicht unmittelbar den festen Boden, sondern ist mittelst Stützen, welche mit dem Körper in einer festen Verbindung stehen, auf den Boden gestellt, so wird die-

jenige Fläche als Grundfläche des Körpers angesehen; welche entsteht, wenn man auf dem Boden die äußersten Punkte der Stützen durch grade Linien verbindet.

## §. 161.

**Aufgabe.** Die Stabilität eines Körpers  $AD'$ , Taf. IV. Figur 85., gegen die Seite  $BD$  zu finden.

**Fig. 85. Auflösung.** Vom Schwerpunkt  $G$  ziehe man auf  $BD$  die winkelrechte Linie  $GC$ , und ziehe in einer durch  $GC$  gehenden auf  $BD$  winkelrechten Ebene die Linie  $GH$  mit der wagerechten Grundfläche  $AD$  parallel, und  $GF$  darauf winkelrecht. Ferner sey  $CH$  auf  $GH$ , und  $CF$  auf  $GF$  winkelrecht. Ist nun  $Q$  das Gewicht des Körpers  $AD'$ , welches nach der vertikalen Richtung  $GF$  wirkt, und  $S$  die Stabilität oder diejenige Kraft, welche im Schwerpunkte  $G$  nach der Richtung  $GH$  der Kraft  $Q$  das Gleichgewicht hält, so muß §. 48.

$$CH \cdot S = CF \cdot Q \text{ seyn, oder}$$

$$S = \frac{CF}{CH} \cdot Q.$$

Nun ist  $CF$  der winkelrechte Abstand des Loths durch den Schwerpunkt von derjenigen Seite der Grundfläche, um welche die Kraft  $S$  den Körper zu drehen strebt, und  $CH$  die winkelrechte Entfernung des Schwerpunktes von der Grundfläche, es folgt daher, daß die Stabilität eines Körpers desto größer wird, je niedriger sein Schwerpunkt liegt, je größer sein Gewicht ist, und je weiter das Loth durch

den Schwerpunkt von den Seiten seiner Grundfläche absteht.

Wird  $CF = 0$ , so ist  $S = 0$ , oder der Körper hat keine Stabilität, und kann von der geringsten Kraft umgeworfen werden, wenn sein Schwerpunkt, lothrecht über den Umfang seiner Grundfläche fällt.

Ist  $CF$  negativ, also  $S$  negativ, so muß der Körper, weil das Loth von seinem Schwerpunkte nicht in die Grundfläche fällt, nothwendig umfallen, indem eine Kraft  $S$  dazu gehört, die Bewegung des Schwerpunktes zu verhindern.

§. 162.

Für eine lothrecht stehende grade Mauer sei  $AB$ , Figur 86.,  $= D$  ihre Dicke,  $BD = L$  ihre Länge,  $BB' = H$  ihre Höhe, und  $G$  das Gewicht von einem Kubikfusse ihrer Materie, so ist §. 74. ihr absolutes Gewicht  $P = G \cdot D \cdot L \cdot H$ . Die Stabilität dieser Mauer nach der langen Seite  $BD$  ist also dann §. 161:

Taf. IV.  
Fig. 86.

$$S = \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{2}H} \cdot P = \frac{D}{H} \cdot G \cdot D \cdot L \cdot H = G \cdot L \cdot D^2.$$

oder die Stabilität einer lothrechten Mauer ist ihrer Länge und dem Quadrat ihrer Dicke proportional. Sie hängt also nicht von ihrer Höhe ab.

Verschiedene Mauern, welche aus einerlei Material und von gleicher Dicke aufgeführt sind, haben gleiche Stabilität, wenn auch ihre Höhe verschieden ist.

Ist hingegen bei übrigens gleichen Umständen eine



Mauer doppelt so dick als eine andere, so ist ihre Stabilität viermal so groß.

Die Dicke einer Mauer, welche bei übrigen gleichen Abmessungen doppelt so viel Stabilität als eine andere erhalten soll, müßte sich zur Dicke dieser Mauer wie  $\sqrt{2} : 1$  oder nahe wie  $\frac{7}{5} : 1$  verhalten. Eine doppelt so stabile Mauer darf also nur um  $\frac{2}{5}$  dicker als eine andere von übrigen gleichen Abmessungen seyn.

§. 163.

Die Stabilität einer gleich dicken Mauer läßt sich ohne Vermehrung ihrer Masse dadurch vergrößern, daß man ihre Dicke vermindert, und dafür Strebepfeiler (Contreforts) anbringt; auch läßt sich leicht einsehn, daß die Stabilität einer solchen Mauer nach der Seite, wo keine Strebepfeiler sind, kleiner ist, als auf der entgegengesetzten.

Es sey bei einer lothrechten Mauer mit Strebepfeilern

- Kaf. IV.  
Fig. 87.
- $d = EH$ , Figur 87., die Dicke der Mauer, und  
 $b = EF$  die Entfernung zweier Pfeiler von einander oder die Länge der Zwischenmauer;  
 $\delta = CD$  die Dicke der Mauer und des Pfeilers, und  
 $\beta = CK$  die Breite des Pfeilers nach der Länge der Mauer gemessen.

Ist nun  $H$  die Höhe der Mauer, so ist die Stabilität eines Strebepfeilers nach der Seite A

$$= \frac{1}{2} \frac{\delta}{H} \cdot \beta \delta H \cdot G = G \cdot \beta \delta^2$$

und von einer Zwischenmauer

$$= \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}H} \cdot b d H \cdot G = G \cdot b d^2.$$

Bezeichnet nun  $S'$  die Stabilität nach der Seite A für einen Strebepfeiler und die dazu gehörige Zwischenmauer, so ist

$$S' = G (\beta \delta^2 + b d^2).$$

Auf ähnliche Art findet man die Stabilität  $S'$  nach der Seite B, auf welcher die Strebepfeiler liegen

$$S' = G (\beta \delta^2 + 2 b d \delta - b d^2).$$

Stehn die Pfeiler auf beiden Seiten der Mauer gleich weit über, so ist ihre Stabilität  $S''$  auf beiden Seiten gleich groß, und man erhält

$$S'' = G (\beta \delta^2 + b d \delta).$$

Für  $\beta = d$ ;  $\delta = 3d$  und  $b = 6d$  erhält man

$$S' : S' : S'' = 5 : 13 : 9.$$

Hieraus lassen sich leicht die nöthigen Folgen ziehen, wenn es darauf ankommt, die größere Stabilität einer Mauer nach der Seite ihrer Strebepfeiler zu übersehen. Es muß aber hierbei nicht vergessen werden, daß ein fester wagerechter Boden vorausgesetzt wird, und daß zur Erlangung eines festen Verbandes unter den Mauersteinen, die Verminderung der Mauerdicke und der Pfeilerdicke nur bis auf eine gewisse Grenze statthaft ist.

Für die Stabilität  $S$  einer lothrechten gleich dicken Mauer, deren Dicke und Höhe  $D$ ,  $H$  ist, wenn ihre Länge  $L = \beta + b$  angenommen wird, erhält man §. 162.

$$S = G \cdot (\beta + b) D^2.$$

Soll diese Mauer einerlei Inhalt mit derjenigen haben, welche mit Strebepfeilern versehen ist, so wird erfordert, daß

$$(\beta + b) D = \beta \delta + b d \text{ sey.}$$

Dies giebt

$$S = G \frac{(\beta \delta + b d)^2}{\beta + b}$$

also verhält sich, wenn wie vorhin,  $S'$  die Stabilität der mit Strebepfeilern versehenen Mauer nach der den Strebepfeilern entgegengesetzten Seite bezeichnet

$$S : S' = (\beta \delta + b d)^2 : (\beta + b) (\beta \delta^2 + b d^2).$$

Für  $\beta = d$ ;  $\delta = 3d$  und  $b = 6d$  erhält man

$$S : S' = 27 : 35.$$

In dem angenommenen Falle wird also die Stabilität der Mauer mit Strebepfeilern, ohne Vermehrung ihrer Masse, beinahe um  $\frac{1}{3}$  größer, und sie würde noch größer werden, wenn man die Strebepfeiler auf beiden Seiten der Mauer gleich weit hervortreten ließe.

#### §. 164.

Will man zur Ersparung der Materialien eine Mauer mit Strebepfeilern anlegen, welche auf beiden Seiten derselben gleich weit hervorstehn, und mit einer eben so langen und hohen lothrechten Mauer, von gleicher Dicke  $D$ , einerlei Stabilität haben soll, und man setzt, daß nach den Bezeichnungen des vorigen §.  $\beta = d$ ,  $\delta = 3d$  und  $b = 6d$  ist, so wird

$$S = 7 d \cdot D^2 \cdot G$$

$$S''' = 27 d^3 \cdot G.$$

Nun ist  $S = S''$  also  $7 D^2 = 27 d^2$  folglich

$$d = D \sqrt{\frac{7}{27}}, \text{ oder beinahe } = \frac{1}{2} D.$$

Der wagerechte Querschnitt der gleich dicken Mauer ist

$$D (\beta + \beta) = 14 : d^2$$

und von der Mauer mit Strebepfeilern

$$\delta \beta + d b = 9 d^2$$

Daher werden bei gleicher Stabilität für die Mauer mit Strebepfeilern beinahe  $\frac{1}{2}$  der Materialien erspart.

§. 165.

**Aufgabe.** Die Stabilität einer graden Mauer zu finden, deren Querschnitt, winkelmäßig auf ihre wagerechte Länge, ein Trapez I K L M, Figur 88., bildet, dessen Schwerpunkt G senkrecht über die Mitte der wagerechten Grundlinie K L fällt. Taf. IV. Fig. 88.

**Auflösung.** Es sey

$S'$  die Stabilität dieser Mauer

$L, H$  ihre Länge und Höhe

die obere Breite  $IM = b$ , die untere  $KL = B$ ,

$G$  das eigenthümliche, und  $P$  das absolute Gewicht, so ist §. 161.

$$S' = \frac{FL}{FG} \cdot P.$$

Aber  $FL = \frac{1}{2} B$ ;

$P = \frac{1}{2} (b + B) H \cdot L \cdot G$  (§. 74.) und

$$FG = \frac{H (2b + B)}{3 (b + B)}. \quad (\S. 104.).$$

Setzt man diese drei Werthe in die zuerst gefundene Gleichung, so erhält man für die Stabilität der trapezförmigen Mauer

$$S' = \frac{3B(b+B)^2}{4(2b+B)} \cdot L \cdot G$$

woraus folgt, daß bei Mauern von verschiedener Höhe, deren Querschnitte Trapezien sind, die Stabilitäten einerlei bleiben, wenn nur die übrigen Abmessungen überein stimmen.

Weil für lothrechte Mauern von gleicher Dicke §. 162.

$$S = G \cdot L \cdot D^2$$

ist, so erhält man unter der Voraussetzung, daß die gleich dicke Mauer mit der trapezförmigen einerlei Länge, Inhalt und Gewicht habe, also  $b + B = 2D$  sey,

$$S : S' = 2b + B : 3B, \text{ also}$$

$$S' = \frac{3B}{2b+B} \cdot S.$$

Für  $b = \frac{1}{4}B$  wird  $S' = 2 \cdot S$ , oder die Stabilität einer trapezförmigen Wand, deren obere Dicke den vierten Theil von der untern beträgt, ist doppelt so groß als die Stabilität einer gleich dicken senkrechten Wand, welche mit der trapezförmigen gleiche Länge und Höhe, und gleichen Inhalt hat.

Will man also das Profil einer gleich dicken lothrechten Wand in ein trapezförmiges verwandeln, welches doppelt so viel Stabilität und gleichen Inhalt hat, so nehme man  $\frac{2}{3}$  von der Breite des rechtwinklichten Profils zur obern, und  $\frac{1}{3}$  von dieser Breite zur untern Breite des trapezförmigen Profils an.

§. 166.

Durch die Plinthe erhalten Mauern ebenfalls eine Verstärkung in Absicht ihrer Stabilität, weil dadurch

die Grundfläche breiter und der Abstand des Schwerpunkts von derselben geringer wird. Wäre  $L$  die ganze Länge einer senkrechten Mauer;  $h$  die Plinthöhe, und  $D'$  die Dicke der Plinte;  $n h$  die Mauerhöhe auf der Plinte und  $d$  ihre Dicke; wenn ferner der Schwerpunkt von der Mauer und Plinte in einerlei Loth fallen, so ist der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts der Mauer und Plinte von der Grundfläche

$$= \frac{h D' + (2 + n) n d h}{2 (D' + n d)}$$

hieraus findet man die Stabilität  $S'$  für die Mauer mit Plinte §. 161.

$$S' = \frac{D' (D' + n d)^2}{D' + n (2 + n) d} \cdot L \cdot G$$

und wenn man annimmt, daß die Plinthöhe den vierten Theil der gesammten Mauerhöhe beträgt, und die Plinte um  $\frac{1}{4}$  dicker als die darauf gesetzte Mauer sey, so wird  $n = 3$  und  $D' = \frac{1}{4} d$ , also

$$S' = \frac{289}{208} d^2 \cdot L \cdot G.$$

Eine gleich dicke Mauer ohne Plinte, welche mit der obigen gleiche Länge  $L$  und Höhe  $(n + 1) h$  hat, wird, wenn  $D$  die durchweg gleiche Dicke der Mauer ist, mit der obigen gleichen Inhalt haben, wenn der Inhalt ihres Querschnitts  $(n + 1) h D$  dem Inhalte  $n h d + h D'$  der Mauer mit Plinte gleich ist. Hieraus findet man

$$D = \frac{D' + n d}{n + 1}$$

und wenn  $S$  die Stabilität der Mauer ohne Plinte ist, §. 163.

$$S = \frac{(D' + n d)^2}{(n + 1)^2} \cdot L \cdot G.$$

Es verhält sich daher

$$S : S' = D' + n (2 + n) d : (n + 1)^2 D'$$

oder, wenn  $n = 3$  und  $D' = \frac{1}{4} d$  gesetzt wird,

$$S : S' = 13 : 16.$$

Durch die angebrachte Plinte wird daher die Stabilität der Mauer um  $\frac{1}{3}$  vergrößert, ohne ihren Inhalt zu vermehren.

§. 167.

Soll zur Ersparung der Materialien eine Mauer mit Plinte, mit einer durchweg gleich dicken Mauer einerlei Stabilität haben, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. die Stabilität der Mauer ohne Plinte

$$S = D^2 \cdot L \cdot G;$$

soll nun  $S = S'$  seyn, so wird erfordert, daß

$$D^2 = \frac{D' (D' + n d)^2}{D' + n (2 + n) d} \text{ ist. Für } n = 3 \text{ und } D' = \frac{1}{4} d$$

$$\text{wird } D^2 = \frac{289}{208} d^2, \text{ also}$$

$$D = d \sqrt{\frac{289}{208}}.$$

Dies giebt den Inhalt des Querschnitts von der gleich dicken Mauer

$$= (n + 1) h d \sqrt{\frac{289}{208}} = 4 h d \sqrt{\frac{289}{208}}, \text{ beinahe } = 4\frac{1}{4} \cdot h d$$

und den Querschnitt der Mauer mit der Plinte

$$= n h d + h D' = \frac{17}{4} h d,$$

es werden daher bei gleicher Stabilität für die Mauer

mit und ohne Platte, bei der erstern nahe  $\frac{1}{8}$  weniger Materialien erfordert.

§. 168.

Ein lothrecht stehender Pfeiler, dessen wagerechter Querschnitt ein Quadrat von der Seite  $D$  ist, hat bei einer Höhe  $H$  eine Stabilität (§. 162.)

$$S = G \cdot D^3.$$

Ein Cylinder, dessen Materie und Grundfläche mit der des Pfeilers einerlei ist, habe  $R$  zum Halbmesser der Grundfläche, so ist seine Stabilität

$$S' = 2\pi R^3 \cdot G.$$

Aber weil  $D^2 = \pi R^2$ , so ist  $R = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$ , daher für diesen Fall

$$S' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} D^3 \cdot G.$$

Es verhält sich also die Stabilität eines Pfeilers, dessen Grundfläche ein Quadrat bildet, zur Stabilität eines Cylinders von gleicher Grundfläche wie

$$S : S' = 1 : \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ oder beinahe } = 39 : 44.$$

§. 169.

Bei einer Kugel fällt das Loth aus dem Schwerpunkte mit dem Umdrehungspunkte zusammen, daher ist der Abstand dieses Loths vom Umdrehungspunkte  $= 0$ , und die Kugel hat keine Stabilität (§. 160.), weshalb solche auf einem wagerechten Boden zwar in Ruhe bleibt, aber durch die geringste Kraft in Bewegung gesetzt wird.

---



## Sechstes Kapitel

### Von der Rolle, dem materiellen Hebel und der Wage.

#### L. Von der Rolle.

##### §. 170.

Zu den einfachsten Mitteln, um eine Kraft oder ein Gewicht nach jeder beliebigen Richtung wirken zu lassen, gehört die Rolle (*Trochlea Poulie*), welche hier als feste kreisförmige Scheibe ohne Schwere angesehen wird, um deren Umfang ein Faden gelegt, und welche in ihrem Mittelpunkte um eine auf der Ebene der Rolle winkelsechte Axe frei bewegt werden kann. Der Faden wird als unausdehnbar, aber vollkommen biegsam ohne Schwere vorausgesetzt.

Zaf. IV.

Fig. 89.

Um die Rolle BKD, Figur 89., deren Axe in E liegt, sey ein Faden ABDE gelegt, und in A eine Kraft P, in E eine Kraft Q, beide nach beliebigen Richtungen BA, DE angebracht, so kann nur zwischen beiden Kräften ein Gleichgewicht entstehen, wenn  $P = Q$  ist. Denn, wenn die Halbmesser CB, CD auf die Richtungen BA, DE winkelsecht gezogen werden, so ist §. 48.  $BC \cdot P = CD \cdot Q$ ; aber  $BC = CD$ , daher  $P = Q$ .

Weil dies nun von jeder andern Richtung eben so gilt, so kann man mit Hülfe der Rollen die Richtungen der Kräfte nach Belieben ändern. Die Kraft  $P$ , welche den Faden  $AB$  nach der Richtung  $BA$  auszudehnen strebt, heißt die *Spannung* (*Tension*) des Fadens. Sie muß in allen Theilen des Fadens  $ABDE$  gleich groß seyn, weil sonst kein Gleichgewicht bestehen kann.

Bei den Rollen, wo die Ase kein mathematischer Punkt ist, kann die Umdrehung um dieselbe durch eine zweifache Vorrichtung bewerkstelligt werden. Entweder ist die Rolle in der Mitte durchbohrt, und wird um einen Bolzen (*Goujon*) bewegt, welcher sich nicht mit umdreht, oder in der Mitte der Rolle sind Zapfen (*Tourillon*) befestigt, welche sich mit der Rolle umdrehen. Damit der Faden von der Rolle nicht abgleite, wird am Umfange derselben eine Rinne (*Gorge*) eingesehritten.

## §. 171.

Dreht sich eine Rolle um ihre Ase, und man kann die Ase als unbeweglich ansehen, so heißt sie eine feste Rolle (*Poulie immobile*), oder, wenn die Ase selbst beweglich ist, wie Figur 90., wo das eine Ende des Fadens in  $A$  befestigt ist, und am andern Ende  $V$  die Rolle  $B$  nebst der Last  $W$  aufwärts gezogen wird, eine bewegliche Rolle (*Poulie mobile*). Taf. IV. Fig. 90.

Die bewegliche Rolle erfordert jedesmal ein Gehäuse oder eine Hülse (*Chape*)  $CD$ , theils um in derselben den Zapfen oder Bolzen der Rolle anzubrin-

gen, theils um die Last mittelst eines Hafens an der Hülse zu befestigen. Dagegen kann die feste Rolle auch ohne Hülse angewandt werden.

Sind die Richtungen der Seile AB und DV vertikal aufwärts, und die Last W vertikal abwärts gerichtet, so haben beide Seile die ganze Last W zu tragen. Weil aber der Abstand beider Seile vom Mittelpunkte C gleich groß ist, so trägt jedes Seil gleich viel; daher ist die Kraft V halb so groß, als die Last oder

$$V = \frac{1}{2} W.$$

Unter der Last W wird hier das Gewicht der Rolle und der daran befindlichen Last verstanden; das Gewicht des Seils aber bei Seite gesetzt.

### §. 172.

Die Größe und Richtung des Drucks auf den Zapfen der Rolle läßt sich finden, wenn der Winkel BLD, Figur 89., welchen die verlängerten Richtungen der gleichen Kräfte P, Q einschließen, gegeben ist.

Zaf. IV.  
Fig. 89.

Man setze  $BLD = \alpha$ , so ist §. 58. LC die Richtung des Drucks auf den Zapfen, und wenn dieser Druck  $= R$  gesetzt wird, so erhält man §. 21. II., weil der Winkel  $BLC = CLD$  ist, den Druck auf den Zapfen oder

$$R = 2 P \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Sind beide Richtungen der Kräfte parallel, so wird  $\alpha = 0$ , also  $\cos \frac{1}{2} \alpha = 1$ , daher  $R = 2 P$ , wie §. 41.

## II. Vom materiellen Hebel.

## §. 173.

Im zweiten Kapitel hat man den Hebel als eine feste gewichtlose Stange ohne Dicke vorausgesetzt, welcher auch ein mathematischer Hebel genannt wird, um ihn vom physischen oder materiellen Hebel zu unterscheiden, der durch jede Stange, sofern sie nicht durch die angebrachten Kräfte gebogen wird, vorgestellt werden kann, und bei welchem zugleich auf sein Gewicht Rücksicht genommen werden muß. Alle Sätze, welche vom mathematischen Hebel erwiesen sind, lassen sich sehr leicht auf den materiellen anwenden, weil es alsdann lediglich nur noch darauf ankommt, das Gewicht desselben in Rechnung zu bringen. Nun ist bekannt, daß man sich das Gewicht eines jeden Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt vorstellen kann, und da sich dieser für jeden materiellen Hebel angeben läßt, so darf man denselben nur eben so wie einen mathematischen behandeln, außer daß man im Schwerpunkte desselben noch eine nach vertikaler Richtung wirkende Kraft annimmt, welche dem Gewichte des materiellen Hebels gleich ist.

## §. 174.

**Aufgabe.** Der materielle Hebel  $AB$ , Figur 91., ist in  $A$  und  $B$  mit den Gewichten  $P$  und  $Q$  belastet; sein Schwerpunkt liegt in  $G$ , und sein Gewicht ist

Taf. IV.

Fig. 91.

$= M$ ; man sucht die Entfernung  $AC$  für den Unterstützungspunkt  $C$ .

**Auflösung.** Weil der materielle Hebel  $AB$  eben so auf die Umdrehung wirkt, als wenn in  $G$  ein Gewicht  $M$  angebracht wäre, so erhält man die Summe der Momente vom Punkte  $A = AG \cdot M + AB \cdot Q$ , daher ist §. 45. der Abstand des Unterstützungspunktes oder

$$AC = \frac{AG \cdot M + AB \cdot Q}{P + Q + M}.$$

**Beispiel.** Die Last  $P$  sey 200 und  $Q = 300$  Pfund, ferner wiege die Stange  $AB$  100 Pfund, so ist  $M = 100$ . Nun sey  $AB = 8$  und  $AG = 4$  Fuß, so findet man den Abstand

$$AC = \frac{4 \cdot 100 + 8 \cdot 300}{200 + 300 + 100} = 4\frac{2}{3} \text{ Fuß.}$$

§. 175.

Zaf. IV.

Fig. 92.

**Aufgabe.** Ein materieller Hebel  $AB$ , Figur 92, ist in den Punkten  $D, E$  unterstützt, und in den Punkten  $F, H, B$  mit den Gewichten  $P, Q, R$  belastet, sein Schwerpunkt liegt in  $G$ , und sein Gewicht ist  $= M$ ; man sucht den Druck auf die Stützen  $D, E$ .

**Auflösung.** Der Druck auf  $D$  sey  $V$ , und auf  $E = W$ , so erhält man für das Gleichgewicht, wenn die Momente von  $E$  gerechnet werden (§. 44.)

$$EB \cdot R = EH \cdot Q + EG \cdot M + EF \cdot P - ED \cdot V$$

folglich den Druck auf  $D$

$$V = \frac{EF \cdot P + EH \cdot Q + EG \cdot M - EB \cdot R}{ED};$$

und wenn man die Momente von  $D$  rechnet, so ist §. 44.

$$DE \cdot W = DF \cdot P + DG \cdot M + DH \cdot Q + DB \cdot R$$

also der Druck auf E, oder

$$W = \frac{DF \cdot P + DH \cdot Q + DB \cdot R + DG \cdot M}{DE}$$

Auch muß nach §. 43.

$$V + W = P + Q + R + M$$

seyn; wenn daher V gefunden ist, so kann daraus W leicht berechnet werden.

Beispiel. Es sey  $EF = 10$ ,  $EH = 4$ ,  $EG = 6$ ,  $EB = 3$ ,  $ED = 13$  Fuß und  $P = 400$ ,  $Q = 200$ ,  $R = 300$  und  $M = 150$  Pfund, so ist der Druck auf D

$$V = \frac{10 \cdot 400 + 4 \cdot 200 + 6 \cdot 150 - 3 \cdot 300}{13} = 369\frac{1}{3} \text{ Pfund,}$$

und man findet, weil nach den gegebenen Abmessungen  $DF = 3$ ,  $DH = 9$ ,  $DB = 16$  und  $DG = 7$  Fuß ist, den Druck auf E oder

$$W = \frac{3 \cdot 400 + 9 \cdot 200 + 16 \cdot 300 + 7 \cdot 150}{13} = 680\frac{1}{3} \text{ Pfund.}$$

Alsdann ist  $V + W = 369\frac{1}{3} + 680\frac{1}{3} = 1050$  Pfund, wie erfordert wird.

Setzte man  $V = 0$ , so zeigt dies an, daß in D keine Stütze erforderlich ist, und daß sich die Gewichte P, Q, R, M auf der einzigen Stütze bei E im Gleichgewicht halten. Erhält V einen negativen Werth, so muß die Stütze bei D oberhalb und nicht unterhalb angebracht werden, weil sonst kein Gleichgewicht statt finden kann, und der Hebel sich um den Punkt D drehen wird, nach der Seite wo R hängt.

§. 176.

Aufgabe. An einem materiellen Hebel AC, Figur 93., welcher in C unterstützt ist, soll in der Entfernung  $CB = a$  eine Last Q auf den Hebel senk-

Taf. IV.  
Fig. 93.

recht angebracht seyn; wie lang wird der Hebel seyn müssen, damit am Ende desselben eine auf denselben winkelrechte Kraft  $P$  mit der Last  $Q$  und dem Gewichte des Hebels im Gleichgewichte ist.

**Auflösung.** Man setze die ganze Länge des Hebels oder  $CA = x$ , und jeder Fuß dieser Länge wiege  $G$  Pfund, so ist das Gewicht des Hebels  $= Gx$ , welches in der Entfernung  $CG = \frac{1}{2}x$  wirkt. Für das Gleichgewicht erhält man §. 46.

$$aQ + \frac{1}{2}x \cdot G \cdot x = xP$$

und hieraus

$$x^2 - \frac{2P}{G}x + \frac{2aQ}{G} = 0$$

folglich die gesuchte Länge

$$x = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 2aGQ}}{G}.$$

Weil hier beide Zeichen vor der Wurzel gelten, so gibt es zwei Fälle, bei welchen ein Gleichgewicht statt finden kann, wenn nur  $2aGQ$  nicht größer als  $P^2$  wird, weil sonst ein unmöglicher Werth für  $x$  entsteht, und keine Auflösung möglich oder der gegebene Fall unstatthaft ist.

**Beispiel.** Die Kraft  $P$  sey 80, und die Last  $Q = 100$  Pfund. Jeder Fuß von der Länge des Hebels wiege 8 Pfund, und die gegebene Entfernung  $CB = a$  sey 3 Fuß, so ist hier  $G = 8$ , also die gesuchte Länge

$$x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4800}}{8} = \begin{cases} 5 \text{ Fuß.} \\ 15 \text{ —} \end{cases}$$

Man kann also den materiellen Hebel 5 oder 15 Fuß lang annehmen, so wird in beiden Fällen unter den gegebenen

## II. Vom materiellen Hebel. 229

Gewichten ein Gleichgewicht entstehen. Im ersten Falle für  $x = 5$  ist

$$3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 5 \cdot 80$$

und im zweiten Falle für  $x = 15$  ist

$$3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 120 = 15 \cdot 80$$

wie erfordert wird.

\* Zusatz. Aus der zuerst gefundenen Gleichung erhält man die Kraft, welche mit der Last  $Q$  und dem Gewichte des Hebels im Gleichgewichte ist, oder

$$P = \frac{aQ + \frac{1}{2}x^2G}{x}.$$

Wären  $a$ ,  $Q$  und  $G$  gegeben, und man sucht die Länge  $x$  des Hebels, welche die kleinste Kraft  $P$  zur Erhaltung des Gleichgewichtes erfordert, so findet man für diesen Fall die Länge

$$x = \sqrt{\left(\frac{2aQ}{G}\right)}$$

und die kleinste Kraft

$$P = \sqrt{(2aGQ)}.$$

Denn es ist

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}Gx^2 - aQ}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2aQ}{x^3}.$$

Für  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$  erhält man  $\frac{1}{2}Gx^2 = aQ$ , also

$x = \sqrt{\left(\frac{2aQ}{G}\right)}$ , und weil dieser Ausdruck statt  $x$  in

$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$  einen positiven Werth giebt, so erhält man für  $P$

ein Kleinstes, wenn  $x = \sqrt{\frac{2aQ}{G}}$  gesetzt wird. Als-

dann ist  $P = \sqrt{(2aGQ)}$ .



Beispiel. Für  $a = 3$  Fuß;  $G = 8$  und  $Q = 100$  Pfund erhält man die Länge

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 100}{8}} = 8,66025 \text{ Fuß}$$

und die kleinste Kraft

$$P = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 100} = 69,282 \text{ Pfund.}$$

Für  $x = 8$  wird

$$P = \frac{3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 8}{8} = 69,5 \text{ Pfund}$$

und für  $x = 9$  ist

$$P = \frac{3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 8}{9} = 69,333 \text{ Pfund.}$$

### III. Von der Wage.

#### §. 177.

Die Wage (*Libra. Balance*) ist eine besondere Anordnung des Hebels, welche dazu dient, das Gewicht eines Körpers mittelst eines Gegengewichts (*Contre-poids*) mit hinlänglicher Genauigkeit zu finden. Man hat vorzüglich zweierlei Arten von Wagen, gleicharmige oder gemeine, und Schnellwagen (*Statera Romana. Peson*). Bei der gleicharmigen sind die Anhangepunkte für die Last und das Gegengewicht gleich weit vom Drehpunkt entfernt. Bei den Schnellwagen sind diese Entfernungen veränderlich. Kann man den Anhangepunkt für das Gegengewicht verschieben, so entsteht eine römische Wage, wenn aber der Drehpunkt verschoben werden kann, eine schwedische.

Die Gestalt der gemeinen Wage kann als hinlänglich bekannt vorausgesetzt werden. Man unterschei-

der bei ihr den Wagebalken (Jugum. *Fléau*), an dessen Enden die Wageschaalen hängen, die Zunge (Lingula, Examen. *Aiguille*), welche rechtwinklich auf dem Wagebalken steht, und die in der Mitte des Wagebalkens befindliche Zapfen, welche in den Pfannen der Scheere (Agina. *Chasse*) ruhen. Gleiche Gewichte in beide Wageschaalen (Lancos. *Bassins*) gelegt müssen veranlassen, daß die Zunge mit den Armen der Scheere in einerlei Vertikalebene fällt, oder welches einerlei ist, daß der Wagebalken wagerecht liegt. Ein kleiner Ueberschuß an Gewicht noch in eine Wageschaale gelegt, muß einen Ausschlag geben oder veranlassen, daß der Balken eine schiefe Lage annimmt. Alsdann bildet die Zunge  $EC$ , Figur 94., mit der vertikalen Scheere einen Winkel  $ECD$ , welcher desto größer werden muß, je größer der Ausschlag ist, daher man auch diesen Winkel selbst den Ausschlag nennt. Eine Wage ist empfindlicher als eine andere, wenn sie bei gleicher Belastung  $P, P$ , und gleichem Uebergewichte  $R$  einen größern Ausschlag giebt.

Taf. IV.  
Fig. 94.

Zieht man durch die beiden Anhangepunkte  $A$  und  $B$  des Wagebalkens eine grade Linie  $AB$ , so bezeichnet diese den Hebel, an welchem die Gewichte wirken. Derjenige Punkt  $C$ , wo der Zapfen des Wagebalkens mit seiner untern wenig abgerundeten Schärfe in den Pfannen der Scheere ruht, heißt der Drehpunkt der Wage. Die Lage dieses Drehpunkts gegen den Hebel  $AB$  hat einen wesentlichen Einfluß auf die Empfindlichkeit der Wage. Vorausgesetzt, daß der

Schwerpunkt des Wagebalkens und der Wageschalen in der Mitte des Hebels  $AB$  liege, und daß die Reibung gänzlich wegfalle, so wird, wenn der Drehpunkt in den Schwerpunkt fällt, die Wage bei gleicher Belastung in allen Lagen im Gleichgewichte bleiben (§. 57.).

**Kaf. IV.** **Fig. 95.** Liegt der Drehpunkt  $C$ , Figur 95., unter dem Schwerpunkte  $G$ , so muß bei gleicher Belastung der horizontale Wagebalken  $AB$  bei der mindesten Erschütterung umschlagen, weil in der schiefen Lage  $A'B'$  das in  $A'$  aufgehängte Gewicht  $P$  ein größeres Moment hat, als das in  $B'$  aufgehängte Gewicht  $P'$ , weshalb der ununterstützte Schwerpunkt  $G'$  so lange sinken wird, bis er seinen tiefsten Stand erreicht hat.

**Kaf. IV.** **Fig. 96.** Liegt hingegen der Drehpunkt  $C$ , Figur 96., über dem Schwerpunkt  $G$ , so kann bei gleicher Belastung die Wage nur in Ruhe bleiben, wenn der Wagebalken horizontal ist. Denn in diesem Falle sind nicht nur die Momente einander gleich, sondern der Schwerpunkt  $G$  hat auch seinen tiefsten Stand erreicht.

### §. 178.

Zur nähern Beurtheilung der gleicharmigen Wage unterscheide man den Punkt  $G$ , Figur 96., welcher in die Mitte zwischen beide Anhangepunkte fällt, von dem Schwerpunkte des Wagebalkens, welcher sich über oder unter  $G$  in der nöthigenfalls verlängerten Linie  $CG$ , etwa in  $g$  befinden kann. Um Verwechslungen zu vermeiden, nenne man  $G$  den Mittelpunkt des Wagebalkens, und setze den Abstand der Anhangepunkte von diesem Mittelpunkte oder  $AG = BG = a$ .

Ferner sey  $CG = b$ ,  $Cg = c$ ;  $M$  das Gewicht einer jeden Wageschaale,  $N$  das Gewicht des Wageballens, und in jede Schaafe sey gleiches Gewicht  $P$  gelegt, außerdem aber noch bei  $B$  eine Uebersucht  $R$ , so muß die Wage in irgend einer Lage im Gleichgewichte seyn.

b  
c  
M  
N  
P  
R

Diese Lage werde durch Figur 97. dargestellt, und man ziehe durch  $C$ ,  $G$ ,  $g$  die Vertikalen  $CD$ ,  $GK$ ,  $gL$ , und durch  $B$  und  $G$  die Horizontalen  $BL$  und  $GE$ , so sind die Winkel  $GCF$ ,  $DBF$  und  $AGE$  einander gleich. Setzt man den Winkel, welchen die Zunge mit der Vertikale bildet, oder den Ausschlag  $= \varphi$ , so ist  $GCF = \varphi$ . Für das Gleichgewicht müssen nun die Momente einander gleich seyn, wenn  $CD$  als Momentanaxe angenommen wird, daher

Zaf. IV.  
Fig. 97.

φ

$$EH.(P + M) + gI.N = BD(P + M + R).$$

Es ist  $EH = EG + GH$  und  $BD = BK - GH$ ; aber  $EG = BK = a \cos \varphi$ ;  $GH = b \sin \varphi$  und  $gI = c \sin \varphi$  daher

$$EH = a \cos \varphi + b \sin \varphi \text{ und } BD = a \cos \varphi - b \sin \varphi$$

also

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)(P + M) + c.N \sin \varphi = (a \cos \varphi - b \sin \varphi)(P + M + R)$$

oder wenn man die ganze Gleichung durch  $\cos \varphi$  dividirt, und alsdann  $\operatorname{tgt} \varphi$  entwickelt, so erhält man die Tangente des Ausschlags oder

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{a R}{b(2P + 2M + R) + c.N}$$

Je größer nun unter übrigens gleichen Umständen

tgt  $\Phi$  wird, desto größer ist der Ausschlag, daher kann man aus dem gefundenen Ausdrücke leicht beurtheilen, für welche Fälle ein größerer Ausschlag zu erwarten ist.

Weil tgt  $\Phi$  unter übrigens gleichen Umständen (wie hier immer vorausgesetzt wird) mit  $a$  wächst, so folgt daraus, daß die Wage einen desto größern Ausschlag geben wird, je länger der Wagebalken ist.

Je kleiner  $b$  ist, desto größer wird tgt  $\Phi$ , daher wird der Ausschlag desto größer, je geringer die Entfernung des Drehpunkts vom Mittelpunkt des Wagebalkens ist.

Mit der Verminderung von  $c$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $P$  wächst ebenfalls tgt  $\Phi$ , daher wird der Ausschlag desto größer, je kleiner der Abstand des Drehpunkts vom Schwerpunkte des Wagebalkens, und je kleiner das Gewicht des Wagebalkens, der Wageschaalen und der Belastung in den Wageschaalen ist.

Weil 
$$\frac{R}{b(2P+2M+R)+cN} = \frac{1}{b} - \frac{b(2P+2M)+cN}{b[b(2P+2M+R)+cN]}$$
 ist, so folgt hieraus, daß der Ausschlag desto größer werden muß, je größer das Uebergewicht  $R$  ist.

Uebrigens ist für  $R = 0$  auch  $\Phi = 0$ , wie erfordert wird.

### §. 179.

Zusatz. Verlangt man, daß eine fertige gleicharmige Wage ohne wesentliche Veränderungen, beson-

ders bei kleinen Lasten einen größern Ausschlag geben soll, so kann dies am leichtesten durch Veränderung des Werths  $c$  bewirkt werden. Für  $c = 0$  fällt der Schwerpunkt des Balkens in den Drehpunkt, und wenn dieser Schwerpunkt über den Drehpunkt fällt, so wird  $c$  negativ, und der Ausschlag kann dadurch, so weit man will, vergrößert werden. Zur Erreichung dieses Zwecks darf man nur an der Zunge ein kleines Gewicht anbringen, welches sich mittelst eines Schraubengewindes nach Belieben auf- oder abwärts schieben läßt, so erhält man hiedurch ein Mittel, durch welches bei kleinen Lasten der Ausschlag bedeutend vermehrt werden kann.

Es ist aber hiebei zu bemerken, daß —  $c$  eine gewisse Grenze nicht übersteigen darf, wenn die Wage noch brauchbar bleiben soll. Denn hätte man den Schwerpunkt des Wagebalkens so weit aufwärts gebracht, daß  $b(2P + 2M) - c \cdot N = 0$  ist, so wäre

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{a \cdot R}{b \cdot R} = \frac{a}{b}$$

und man würde alsdann bei großen und kleinen Uebergewichten immer denselben Ausschlag erhalten.

## §. 180.

Befinden sich in den Wageschaalen gleiche Lasten, so kommt die Wage nur dann in Ruhe, wenn die Zunge einspielt, oder wenn der Balken eine horizontale Lage annimmt. Man sagt alsdann, die Wage ist desto rascher, je größer ihr Bestreben ist, in die horizontale Lage zu kommen. Es sey daher  $W$  die Kraft, welche

**Taf. IV. Fig. 97.** im Punkte B, Figur 97., nach der auf BC winkeltreue Richtung BW erfordert wird, die Wage in der Lage zu erhalten, wenn der Ausschlag  $= \varphi$  und die übrige Bezeichnung wie §. 178. ist. Alsdann läßt sich die Kraft W nach den Richtungen BC und BP in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die erste durch den festen Punkt bei C aufgehoben wird, die letzte aber, wenn solche  $= R$  gesetzt wird, eben die Wirkung wie W verursachen muß. Nun ist, wenn der Winkel CBG  $= \psi$  gesetzt wird,

$$CBP = \varphi + \psi + 90^\circ,$$

daher §. 19. III.

$$R = W \frac{\sin CBW}{\sin CBP} = W \frac{\sin 90^\circ}{\sin (\varphi + \psi + 90^\circ)} = \frac{W}{\cos (\varphi + \psi)}.$$

Aber  $\cos (\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$ ;

$$BC = \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

$$\cos \psi = \frac{BG}{BC} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \text{ und } \sin \psi = \frac{CG}{BC} = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

daher

$$\cos (\varphi + \psi) = \frac{a \cos \varphi - b \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

und, wenn dieser Werth in die zuerst gefundene Gleichung gesetzt wird,

$$R = \frac{W \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a \cos \varphi - b \sin \varphi}.$$

Nach §. 178., ist aber für das Gleichgewicht

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)(P + M) + c N \sin \varphi$$

$$= (a \cos \varphi - b \sin \varphi)(P + M + R) \text{ oder}$$

$$(a \cos \varphi - b \sin \varphi) R = 2 b (P + M) \sin \varphi + c N \sin \varphi,$$

und man findet, wenn statt R der oben gefundene Werth gesetzt wird, die Kraft, welche nach der Rich-

ung BW erforderlich ist, die Wage in der Lage Figur 97. zu erhalten, oder

$$W = \frac{[2b(P + M) + cN] \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Taf. IV.  
Fig. 97.

Je größer diese Kraft bei einerlei Winkel  $\varphi$  wird, desto größer ist das Bestreben der Wage, sich ins Gleichgewicht zu setzen. Man müßte daher die Abmessungen der Wage so einrichten, daß W möglichst groß wird. Weil dies aber nur durch ganz entgegengesetzte Regeln als die §. 178. erhalten wird, so folge daraus, daß die Wage desto rascher wird, je kleiner ihr Ausschlag ist, und man kann daher nur einen dieser Zwecke auf Kosten des andern erreichen.

## §. 181.

Sind bei einer gemeinen Wage die Arme des Wagebalkens ungleich lang, und man will das Gewicht einer Last Q finden, so lege man in die Schale bei A, Figur 96., die Last Q, und in die Schale bei B das erforderliche Gegengewicht P. Nun lege man Q in die andere Schale bei B, und suche bei A das nöthige Gegengewicht P', so findet man das wahre Gewicht

Taf. IV.  
Fig. 96.

$$Q = \sqrt{P \cdot P'}.$$

Denn es sey  $AG = x$ ,  $GB = y$ , so erhält man durch die erste Abwiegun

$$xQ = yP \text{ also } Q = \frac{y}{x}P.$$

Durch die zweite Abwiegun

$$xP' = yQ \text{ also } Q = \frac{x}{y}P', \text{ daher}$$



$$Q^2 = \frac{y}{x} \frac{x}{y} P P' = P P' \text{ also } Q = \sqrt{P P'}.$$

Ohne Ausziehung der Quadratwurzel erhält man das Gewicht der Last  $Q$  leichter, wenn man  $P$  mit  $Q$  ins Gleichgewicht bringt, alsdann  $Q$  wegnimmt, und in die Schale, worin  $Q$  gelegen hat, so viel Gewichte legt, bis solche mit  $P$  ins Gleichgewicht kommen, da denn die Summe der zuletzt eingebrachten Gewichte dem Gewichte von  $Q$  gleich ist. Dies Verfahren nennt man die *Tarirung* eines Gewichts.

## §. 182.

Bei der gewöhnlichen oder römischen Schnellwage, wo mit einerlei Gegengewicht (*Contre-poids*) Lasten von verschiedener Größe gewogen werden, indem der Aufhängepunkt der Last und der Drehpunkt unverändert bleiben, kann man die Sätze von der gemeinen Wage mit den nöthigen Abänderungen ebenfalls anwenden, und danach die zweckmäßige Anordnung der Schnellwage beurtheilen.

Hat die Schnellwage eine solche Einrichtung, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens mit der Wageschale zwischen den Drehpunkt und den Aufhängepunkt der Schale fällt, so kann die Eintheilung des Wagebalkens leicht dadurch bewerkstelligt werden, daß man, wenn sich keine Last in der Wageschale befindet, das Gegengewicht so lange auf dem Wagebalken rückt, bis die Zunge einspielt oder der Balken horizontal liegt. Der Ort, wo alsdann das Gegengewicht hängt, werde mit Null bezeichnet. Rückt man ferner das Gegenge-

wicht bis ans Ende des Wagebalkens, und legt in die Schaaale so lange Gewichte, bis die Zunge wieder einspielt, so findet man die größte Last, welche bei unveränderlichem Gegengewichte auf der Schnellwage gewogen werden kann. Man vermindere alsdann die in der Schaaale befindliche Last so weit, bis eine grade leicht theilbare Zahl von Pfunden übrig bleibt, suche den Punkt am Balken, wo das Gegengewicht aufgehängt werden muß, damit die Zunge einspiele, und bemerke den gefundenen Punkt mit derjenigen Zahl, welche die Anzahl der Pfunde in der Schaaale angiebt. Wird nun die grade Linie zwischen diesem und dem gefundenen Nullpunkte in eben so viel gleiche Theile getheilt, als die letzte Last in der Schaaale Pfunde enthielt, so erhält man dadurch die Eintheilung für ganze Pfunde, und wenn es die Größe der einzelnen Theile gestattet, so kann man durch fortgesetzte Halbierung halbe, viertel u. Pfunde angeben.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich leicht überzeugen. Es sey der Abstand des Drehpunkts vom Anhangepunkt der Wageschaaale =  $a$ , die Last in der Wageschaaale =  $Q$ ; der Abstand des Schwerpunktes des Wagebalkens und der Wageschaaale vom Drehpunkte =  $g$ , das Gewicht des Balkens und der Schaaale =  $N$ . Ferner das Gegengewicht =  $P$ , und sein Abstand vom Drehpunkte =  $x$ , so ist für das Gleichgewicht

$$xP = g \cdot N + a \cdot Q$$

und man findet hieraus den Abstand des Gegengewichts vom Drehpunkt, oder

$$x = \frac{G^N}{P} + \frac{a}{P} \cdot Q.$$

Bezeichnet  $x'$  diesen Abstand für  $2 Q$ ;  $x'$  für  $3 Q$  u. f. w., so erhält man ferner

$$x' = \frac{G^N}{P} + \frac{a}{P} \cdot 2Q$$

$$x'' = \frac{G^N}{P} + \frac{a}{P} \cdot 3Q$$

$$x''' = \frac{G^N}{P} + \frac{a}{P} \cdot 4Q \text{ u. f. w. } \text{Daher}$$

$$x' - x = \frac{a}{P} Q$$

$$x'' - x' = \frac{a}{P} Q$$

$$x''' - x'' = \frac{a}{P} Q \text{ u. f. w.}$$

Hieraus folgt, daß wenn die Last  $Q$  um gleichviel wächst, so müssen auch die Abstände des Gegengewichts um gleichviel zunehmen, und hiedurch ist erwiesen, daß es verstatet ist, den Wagebalken in gleich große Theile einzutheilen.

Fällt der Schwerpunkt des Balkens und der Schaale nicht zwischen den Drehpunkt und den Aufhängepunkt der Schaale, sondern auf die andere Seite des Balkens, so läßt sich kein Nullpunkt für das Gegengewicht angeben. Man muß alsdann einen andern Punkt am Wagebalken statt des Nullpunkts auffuchen, indem man das Gegengewicht so nahe wie möglich am Drehpunkte aufhängt, und so lange Gewichte in die Schaale legt, bis die Zunge bei einer ganzen

Zahl von Pfunden einspielt. Die Zahl der Pfunde sey  $n$ , und für den zweiten Punkt am Ende des Wagebalkens  $= m$ . Zieht man nun  $n$  von  $m$  ab, so ist  $m - n$  die Anzahl der Theile, in welche die Weite zwischen beiden Punkten getheilt werden muß, um ganze Pfunde zu erhalten, wobei man ebenfalls die Einrichtung so treffen kann, daß  $m - n$  eine solche Zahl wird, welche sich leicht eintheilen läßt. Der Beweis für dieses Verfahren beruht mit dem zuerst erwähnten auf gleichen Gründen; nur ist noch zu bemerken, daß eben das, was hier von Pfunden gesagt ist, auch von Lothen &c. oder jeder andern Einheit gilt.

§. 183.

**Zusatz.** Will man mit einer Schnellwage noch größere Lasten wiegen, als das Gegengewicht gestattet, ohne dabei die vorhandene Eintheilung des Wagebalkens abzuändern, so kann dies durch Anbringung eines größern Gegengewichts bewirkt werden, indem man dasselbe so weit vermehrt, daß jede Abtheilung auf dem Wagebalken das doppelte oder vielfache bedeutet. Allein man darf nicht schließen, daß, wenn das Gegengewicht  $P$  verdoppelt wird, alsdann auch die Last  $Q$  unter übrigens gleichen Umständen für das Gleichgewicht doppelt so groß werden müsse, wovon man sich leicht überzeugen kann. Denn es sey mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung  $P$  mit  $Q$  im Gleichgewicht, so ist  $xP = gN + aQ$ , daher das Gegengewicht

$$P = \frac{gN}{x} + \frac{aQ}{x}.$$

Soll nun bei unverändertem Abstände  $x$  die Last  $Q$  doppelt so groß werden, und man sucht das zugehörige Gegengewicht  $P'$ , so wird

$$P' = \frac{gN}{x} + \frac{a \cdot 2Q}{x}, \text{ oder weil } \frac{aQ}{x} = P - \frac{gN}{x} \text{ ist,}$$

so erhält man das erforderliche Gegengewicht

$$P' = 2P - \frac{gN}{x}$$

wenn daher der Schwerpunkt des Balkens und der Schaafe zwischen den Anhangepunkt der Schaafe und den Drehpunkt fällt, so wird zur Abwiegunq doppelt so großer Lasten, bei unveränderter Eintheilung des Balkens ein Gegengewicht erfordert, welches kleiner als das Doppelte desjenigen ist, welches zum Abwiegen der einfachen Lasten nöthig war. Da es nun überdies unbequem ist, große Gegengewichte auf dem Wagebalken zu bewegen, so kann man sich zur Abwiegunq größerer Lasten der Vorhängegewichte bedienen, welche in dem vom Drehpunkte am weitesten entfernten Spielungspunkte aufgehängt werden.

Gesezt, man verlange, daß eine Schnellwage außer der Last  $Q$ , welche ihr Gegengewicht  $P$  angiebt, auch zugleich jedesmal noch eine Last  $Q'$  wiege, so daß die gesammte Belastung in der Wageschaafe  $Q + Q'$  sey, so seze man das in der Entfernung  $b$  vom Drehpunkte nöthige Vorhängegewicht  $= V$ , so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$bV + xP = gN + a(Q + Q')$$

sey. Es ist aber  $xP = gN + aQ$ , daher wenn man diesen Ausdruck von dem vorstehenden abzieht

$$bV = aQ' \text{ oder } V = \frac{aQ'}{b}.$$

Ist daher die beständige Last  $Q'$  gegeben, so findet man leicht aus dieser und den bekannten Abständen  $a, b$  die Größe des Vorhängegewichts  $V$ .

## Siebentes Kapitel.

### Von der Reibung.

#### §. 184.

So wie man sich die Körper vollkommen fest vorstellen kann, eben so läßt sich voraussetzen, daß ein Körper vollkommen glatt sey, in welchem Falle jede Kraft, welche auf einen solchen auf einer wagerechten vollkommen glatten Fläche befindlichen Körper von der Seite wirkt, den Zustand der Ruhe oder das Gleichgewichte aufheben, und den Körper in Bewegung setzen kann, weil das Gewicht des Körpers von der wagerechten Ebene getragen wird. Ist hingegen die Oberfläche des Körpers und die Fläche, worauf er ruhet, rauh, oder mit kleinen Erhabenheiten versehen, so greifen diese wechselseitig in die Vertiefungen, und es kann schon eine ansehnliche Kraft erfordert werden, um das Gleichge-

nicht aufzuheben. Da nun die Oberflächen aller Körper, selbst bei der besten Politur, noch einige Unebenheit oder Rauhigkeit behalten, so verursacht dieser Umstand, daß, wenn eine Kraft mit mehrern andern Kräften im Gleichgewichte ist, und man vermehrt dieselbe noch um einen geringen Theil, alsdann in dem Falle noch keine Bewegung oder Aufhebung des Gleichgewichts erfolgt, wenn die Rauhigkeit von den aneinander gepreßten Oberflächen der Bewegung oder Aufhebung des Gleichgewichts widersteht, und man ist genöthigt, zur Ueberwältigung dieses Widerstandes noch eine besondere Kraft zu verwenden, bevor der kleinste Ueberschuß an Kraft das Gleichgewicht aufheben kann. Dieser Widerstand, welcher von der Rauhigkeit der berührenden Flächen entsteht, heißt die Reibung oder *Strikzion* (*Frictio. Frottement*).

## §. 185.

**Zaf. IV.** Auf der wagerechten Fläche  $AB$ , Figur 98., be-  
**Fig. 98.** finde sich ein Körper  $AD$ , dessen Gewicht  $P$  von der Fläche  $AB$  getragen wird. In  $E$  sen mit  $AB$  parallel nach der Richtung  $EH$  eine Kraft  $F$  angebracht, oder welches einerlei ist, am Faden  $EHF$ , welcher über die Rolle  $H$  geht, hänge ein Gewicht  $F$  in  $F$ , so wird die Reibung der berührenden Flächen bei  $AB$  die Bewegung des Körpers so lange aufhalten, bis das Gewicht  $F$  hinlänglich vermehrt worden, um den Reibungswiderstand zu überwältigen. Ist nun das Gewicht  $F$  von der Beschaffenheit, daß der geringste Ueberschuß an Kraft den Körper  $AD$  in Bewegung

setzen kann, so ist  $F$  mit der Reibung im Gleichgewichte, und die Größe der Reibung wird durch das Gewicht  $F$  angegeben, daher man auch das Gewicht  $F$  die Größe der Reibung nennt.

Der Erfahrung gemäß ist die Größe der Reibung verschieden, wenn es darauf ankommt, den Körper in Bewegung zu setzen, oder nach einerlei Richtung in Bewegung zu erhalten, welches auch schon daraus geschlossen werden kann, daß bei der Bewegung die Hervorragungen der Flächen nicht so sehr in die Vertiefungen eindringen können, wie dies nach vorhergegangener Ruhe der Fall ist. Man unterscheidet daher die Reibung für die anfängliche Bewegung oder die Reibung der Ruhe von der Reibung während der Bewegung.

Im Anfange oder während der Bewegung kann ein Körper über den andern weggeschoben werden, wie dies im Beispiel Figur 98. angenommen war, oder ein Körper kann sich um eine unbewegliche Ase drehen, und bei dieser Umdrehung einen andern unbeweglichen Körper berühren, wodurch eine drehende Reibung entsteht, wie bei den Zapfen in Pfannen. Auch gehört hieher das Umdrehen der Rollen um Bolzen. Beide Reibungen, die schiebende und drehende, können unter dem Namen der gleitenden Reibung begriffen werden, von welcher die rollende oder wälzende Reibung verschieden ist, bei welcher ein Cylinder, eine Kugel u. über eine Fläche gerollt oder gewälzt wird. Es

Taf. IV.  
Fig. 98.



läßt sich leicht einsehen, daß die wälzende Reibung weit kleiner als die gleitende ist.

Durch die Politur und dadurch, daß man die reibenden Flächen mit einer schädlichen Materie bestreicht oder schmirt, kann die Rauheit derselben ansehnlich vermindert, also die Reibung bedeutend verkleinert werden, nur ist es nicht möglich, die Reibung hiedurch gänzlich aufzuheben.

### §. 186.

Die Größe der Reibung ist von sehr vielen Umständen abhängig, besonders von der Materie der reibenden Körper, von ihrer Rauigkeit, der Schmiere, der Adhäsion oder dem Zusammenhange, dem Drucke gegen die reibenden Flächen, der Größe dieser Flächen, der Temperatur u. dgl. so daß es äußerst schwer fällt, allgemeine Gesetze über die Größe der Reibung anzugeben, weshalb die Resultate, welche man über die Reibung der Körper von verschiedener Materie erhalten hat, bei der Anwendung auf ähnliche Körper nur als Durchschnittssätze angesehen werden können, welche von der Wahrheit nicht weit entfernt sind, da es bekannt ist, welche Verschiedenheit unter Körpern von einerlei Materie statt findet. Ueberdies kommt nächst der Rauheit der reibenden Flächen auch noch die besondere Beschaffenheit der Körper in Absicht ihres chemischen Verhaltens in Betrachtung, weil bei einer Bewegung, welche Wärme erzeugt, eine Zersetzung der reibenden Theile entsteht, wodurch eine stärkere Abnutzung und ein vermehrter Widerstand verursacht werden kann. Die

Größe der Reibung kann daher auch nur durch richtige und im Großen angestellte Versuche bestimmt werden, und wenn gleich schon viele Untersuchungen über diesen Gegenstand bekannt sind, so übertreffen doch die neuern hierher gehörigen Versuche des Herrn Coulomb (\*) alle bisherigen, theils wegen ihrer Genauigkeit und Mannigfaltigkeit, theils wegen der Größe der reibenden Körper und der Belastung, welcher man sich zur Erhaltung richtiger Resultate bediente. Den Erfahrungen gemäß kann man nachstehende Sätze in Bezug auf gleitende Reibung annehmen:

(I) Die Reibung vermehrt sich mit der Rauigkeit der reibenden Flächen. Weil es aber unmöglich ist, für die verschiedenen Abstufungen der Rauigkeit einen Maaßstab anzugeben, so läßt sich auch über die Größe der Reibung in dieser Absicht nichts bestimmen, und es müssen daher die folgenden Sätze darauf eingeschränkt werden, daß die reibenden Flächen möglichst geglättet oder polirt sind.

(II) Die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem Druck proportional.

Werden die Körper doppelt so stark an einander gepreßt, so ist auch die Reibung doppelt so groß u. s. w. Die Versuche geben zwar bei geringen Bela-

---

(\*) *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des Cordages. Pièce qui a remporté le prix double de l'acad. des scienc. pour l'année 1781. — Mem. de mathemat. et de physiq. présentées à l'académie. Tom. X. Paris 1785. p. 161 — 332.*

stungen kleine Abweichungen von diesem allgemeinen Satze; für die Ausübung läßt sich aber derselbe ohne Unterschied anwenden. Nachstehende Versuche, welche über die schiebende Reibung der Ruhe aus der angeführten Coulombschen Schrift gezogen sind, werden dies noch näher erläutern.

Schmiere.	Reibende Körper.	No. der Versuche.	Reibende Fläche. □ Zoll.	Druck. Pfund.	Reibung. Pfund.	Verhältniß der Reibung zum Druck = 1.
Schmieröl.	Eichen auf Eichenholz =	1	432	74	30	0,405
		2	432	874	406	0,465
		3	432	2474	1116	0,451
		4	*	250	106	0,424
		5	*	450	185	0,413
		6	*	856	356	0,416
	Eichen auf Kiefern =	7	48	50	36	0,720
		8	48	450	284	0,631
		9	48	850	560	0,659
	Kiefern auf Kiefern =	10	48	50	27	0,540
		11	48	250	145	0,580
		12	48	850	480	0,565
	Ulmen auf Ulmen =	13	48	45	21	0,467
		14	48	450	207	0,460
		15	48	1650	756	0,458
	Eichen auf Eichen +	16	*	50	13	0,260
		17	*	1650	450	0,273
	Eisen auf Eichen =	18	45	53	10	0,189
		19	45	1650	340	0,206
	Eisen auf Eisen	20	45	51	15	0,294
		21	45	450	124	0,276
	Messing auf Eisen	22	45	50	14	0,280
		23	45	450	112	0,249
	Kupfer auf Eisen	24	*	47	8	0,170
		25	*	850	140	0,165
Salz	Eichen auf Eichen	26	180	1650	622	0,377
		27	180	3250	1387	0,426
	Kupfer auf Eisen	28	45	50	7	0,140
		29	45	450	48	0,107
		30	45	1650	168	0,102
Abger. n. Salz	Eichen auf Eichen =	31	648	2310	514	0,222
		32	648	5810	1535	0,264

Von den Zeichen, welche sich in der Tafel befinden, bedeutet:

- \* daß die reibende Fläche möglichst verkleinert war,
- = daß sich die Hölzer nach der Richtung der Fasern bewegten, und
- + daß sich die Holzfasern kreuzten.

Bei diesen Versuchen ist noch zu bemerken, daß nach einer sehr kurzen Ruhezeit die Reibung kleiner war, als wenn sich der Körper schon einige Zeit in Ruhe befand; in einigen Fällen erhielt die Reibung nach mehreren Minuten ihren größten Werth, und blieb alsdann für größere Zeiten unverändert; in andern Fällen waren aber mehrere Tage nöthig, bis die Reibung ihren größten Werth erhielt. Die Angaben der vorstehenden Tafel beziehen sich auf die Fälle, für welche die Reibung beständig ist.

Bei den Versuchen mit Schmiere mußte eine beständige Größe wegen der Adhäsion in Abzug gebracht werden, allein für die Ausübung darf man hierauf nicht Rücksicht nehmen.

(III) Bei gleichem Druck ist unter übrigens gleichen Umständen die Größe der Reibung unabhängig von der Größe der reibenden Fläche.

Dies läßt sich schon ohne Versuche deshalb erwarten, weil bei gleichem Druck auf eine doppelt so große Fläche, wenn die Belastung gleichförmig vertheilt ist, jeder □ Zoll der reibenden Fläche nur halb so stark gepreßt wird, als wenn die Fläche halb so groß wäre. Auch durch die Vergleichung der Versuche 1. 2. 3.

mit 4. 5. 6. in vorstehender Tafel wird dieser Satz bestätigt. Dagegen ist bei den eingeschnierten Flächen deshalb eine Ausnahme von dem vorstehenden Satze, weil die Schmiere unter sich und mit der Fläche zusammenhängt, daher auch bei größern Flächen in dieser Hinsicht ein größerer Widerstand entsteht. Dieser kann aber für die meisten Fälle der Ausübung aus der Rechnung gelassen werden.

(IV.) Die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung, und die gleitende größer als die drehende.

Zwischen diesen verschiedenen Reibungen ist aber nach Verschiedenheit der Körper und Schmiere das Verhältniß der Reibungen verschieden, wie solches aus den verschiedenen Resultaten in der Tafel des folgenden §. erhellet.

(V.) Die verschiedene Geschwindigkeit der Körper bei der Reibung während der Bewegung hat bei manchen Materien gar keinen, und bei andern nur einen solchen Einfluß, daß derselbe in den meisten Fällen bei Seite gesetzt werden kann.

Bei der größern Geschwindigkeit kommen zwar mehr Theile der Oberflächen in gleicher Zeit in Berührung, aber auch in demselben Verhältnisse wird die Dauer der Berührung verkleinert, und die Unebenheiten können weniger in einander dringen, daher mit Bezug auf die Coulombschen Versuche, dieser Satz für

die Ausübung ohne Nachtheil besonders bei Holz auf Holz und Metall auf Metall gelten kann.

§. 187.

Setzt man, daß  $Q$  den Druck bezeichnet, durch welchen ein reibender Körper gegen einen andern gepreßt wird, und daß  $F$  die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft ist, welche hier die Reibung heißt, so kann für jede Last  $Q$  die Reibung  $F$  gefunden werden, wenn nur unter ähnlichen Umständen für eine andere Last  $Q'$  die Reibung  $F'$  bekannt ist, weil sich nach (III) verhält

$$Q' : F' = Q : F, \text{ also ist}$$

$$F = \frac{F'}{Q'} Q.$$

Die Zahl  $\frac{F'}{Q'}$  kann man den Reibungskoeffizienten nennen. Für die gleitende Reibung bei Ulmen auf Ulmen-Holz ist derselbe nach der Tafel des vorigen §.  $= 0,46$ , daher für diesen Fall  $F = 0,46 \cdot Q$ . Wäre der Druck  $Q = 150$  Pfund, so wird die Reibung  $F = 0,46 \cdot 150 = 69$  Pfund

Für die Folge soll der Reibungskoeffizient allemal ganz allgemein durch  $\mu$  ausgedrückt werden, so daß allgemein  $F = \mu Q$  ist, wo dann der Werth von  $\mu$  nach den besondern Umständen zu bestimmen ist.

Weil die Anwendung der allgemeinen statischen Lehren dadurch sehr erleichtert wird, wenn Tafeln für die verschiedenen Werthe von  $\mu$  vorhanden sind, so können hiezu nachstehende Tafeln dienen, welche sich auf die Coulombschen Versuche beziehen.

I. T a f e l:  
Gleitende Reibung der Ruhe.

Eichen auf Eichen .	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{6}{35}$	$\frac{4}{11}$				
Kiefern auf Kiefern .	$\frac{7}{11}$									
Ulmen auf Ulmen .	$\frac{6}{13}$									
Eichen auf Kiefern .	$\frac{2}{3}$									
Steineichen auf Guajac										$\frac{1}{18}$
Eisen auf Eisen . .	$\frac{2}{7}$									
Kupfer auf Eisen .	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{10}$		
Eisen auf Guajac .						$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$			
Eisen auf Eichen . .	$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{14}$				
Kupfer auf Eichen .	$\frac{2}{11}$									
Messing auf Eisen .	$\frac{4}{13}$									

= bedeutet hier daß die reibenden Körper nach der Richtung der Holzfasern bewegt worden, und  
+ daß sich die Holzfasern durchkreuzen.



## II. T a f e l.

## Gleitende Reibung der Bewegung.

Eichen auf Eichen . . .	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{10}$				
Kiefern auf Kiefern . . .	$\frac{1}{8}$								
Ulmen auf Ulmen . . .	$\frac{1}{15}$								
Eichen auf Kiefern . . .	$\frac{1}{15}$								
Steineichen auf Guajac						$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{17}$	
Steineichen auf Ulmen .						$\frac{1}{33}$		$\frac{1}{10}$	
Buchsbaum auf Guajac						$\frac{1}{23}$		$\frac{1}{14}$	
Buchsbaum auf Ulmen .						$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{10}$	
Eisen auf Eisen . . .	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$							
Kupfer auf Eisen . . .	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{11}$				$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{13}$
Eisen auf Guajac . . .						$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$		
Eisen auf Eichen . . .	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{33}$		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{9}$				
Kupfer auf Eichen . . .	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{41}$		$\frac{1}{18}$					

§. 188.

Die Reibung kann in Vergleichung mit andern Kräften, welche Druck oder Bewegung hervorbringen, als eine leidende (passive) Kraft angesehen werden, welche der Bewegung widersteht, und nur wenn sie aufgehoben werden soll, kann sie als Kraft in Rechnung gebracht werden, da sie nur zur Vernichtung anderer Kräfte, nicht aber für sich selbst thätig ist. Sie ist da wirksam, wo sich die reibenden Flächen berühren, und ihre Richtung liegt in der Richtung der Tangente der Berührungsflächen. Weil sie aber der Bewegung sowohl nach der einen als nach der andern Seite ihrer Richtung gleich stark widersteht, so sind für das Gleichgewicht zwei Fälle sehr wohl zu unterscheiden; einmal, wenn es lediglich darauf ankommt, die Ruhe zu erhalten, in welchem Falle die Reibung zum Vortheile der Kraft wirkt, weil so viel weniger Kraft angewandt werden darf, als wegen der Reibung erforderlich ist, ohne daß die Ruhe unterbrochen werden könnte. Soll aber bei dem geringsten Ueberschuß an Kraft die Ruhe aufhören, also das Gleichgewicht aufgehoben werden, so muß die anzuwendende Kraft nicht nur allen übrigen Kräften, sondern auch der Reibung das Gleichgewicht halten. Man kann dies folgendergestalt allgemein ausdrücken. Wenn  $P$  die Kraft bezeichnet, welche für das Gleichgewicht mit mehreren andern Kräften ohne Rücksicht auf Reibung erfordert wird, und  $F$  bezeichnet die zur Ueberwältigung der Reibung anzuwendende Kraft, so ist die Kraft  $P \pm F$  und jede

zwischen  $P + F$  und  $P - F$  liegende Kraft im Stande, den Körper in Ruhe zu erhalten. Die Kraft  $P - F$  ist alsdann die kleinste Kraft, welche die Bewegung des Körpers verhindert, dagegen ist  $P + F$  diejenige, welche mit der Last und der Reibung im Gleichgewichte ist, so daß der kleinste Ueberschuß an Kraft vermögend ist, das Gleichgewicht aufzuheben.

In der Folge werden gewöhnlich die Untersuchungen nur auf den letzten Fall eingeschränkt, und wenn es erforderlich ist, von dem ersten Falle Gebrauch zu machen, so wird solches jedesmal besonders angemerkt werden.

§. 189.

Die Kraft, mit welcher die Oberflächen der Körper unter sich oder mit der aufgelegten Schmiere zusammenhängen, oder die Adhäsion, ist zwar §. 186. III. außer Acht gelassen worden, weil der Antheil, welchen die Reibung an den Hindernissen der Bewegung hat, so bedeutend ist, daß man in den meisten Fällen die Kraft, welche zur Ueberwältigung des Zusammenhanges verwandt werden muß, als unbedeutend gegen die Kraft ansehen kann, welche wegen der Reibung erfordert wird. Hiezu kommt noch, daß man für jeden besondern Fall selten die Reibung ganz genau angeben kann, und daß daher größere Genauigkeit bei der Berechnung mit Rücksicht auf Zusammenhang nur die Formeln weitläuftiger macht, ohne für die Ausübung brauchbarere Resultate zu geben.

Um den Einfluß zu übersehen, welchen unter gewissen Umständen die Größe der Berührungsfläche und

Die Art der Schmiere auf die Reibung haben, so ist zu bemerken, daß nach den angeführten Coulombschen Versuchen bei der gleitenden Reibung zwischen kupfernen Platten auf eisernen, wenn solche mit neuem Talg eingeschmiert waren, der Zusammenhang der Schmiere auf 45 □ Zoll Fläche  $1\frac{1}{2}$  Pfund betragen hat.

§. 190.

Ueber die Größe der wälzenden Reibung hat Herr Coulomb ebenfalls einige sehr wichtige Versuche angestellt, indem er auf zwei wagerechte Unterlagen A A, Figur 99., eine mit einem dünnen Faden umschlungene Walze legte, und an die Enden des Fadens gleiche Gewichte Q, Q aufhing. Um die wälzende Reibung auszumitteln, vermehrte man das eine Gewicht so lange, bis durch den Zusatz eines Gewichts F eine unmerklich anhaltende Bewegung entstand. Die Unterlagen waren aus Eichenholz, und nebst den gebräuchtesten Walzen möglichst polirt. Nachstehende Tafeln enthalten die Resultate der Versuche.

Taf. IV.

Fig. 99.

Die Walzen von Guajac auf Unterlagen von Eichenholz.

Gesamte Belastung der Walze. Pfund.	Gewicht F zur Ueberwältigung der Reibung.	
	Durchmesser der Walze 2 Zoll.	Durchmesser der Walze 6 Zoll.
100	1,6 Pfund	0,6 Pfund
500	9,4 —	3,0 —
1000	18,0 —	6,0 —

# Die Walzen von Ulmen auf Unterlagen von Eichenholz.

Gesamte Belastung. Pfund.	G e w i c h t F.	
	Durchmesser der Walze 6 Zoll.	Durchmesser der Walze 12 Zoll.
1000	10 Pfund	5 Pfund

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß sich bei der wälzenden oder rollenden Bewegung die Reibung wie die Belastung, und umgekehrt wie die Halbmesser der Walzen verhält, wenn die Körper von einerlei Materie sind.

Bei der sechszölligen Walze von Guajac war bei 100 Pfund Druck die Reibung 0,6 Pfund, und bei einem zehnmal größeren Druck von 1000 Pfund = 6 Pfund. Eben so fand man, wenn die Walzen von Ulmenholz jedesmal mit 1000 Pfund belastet waren, bei der sechszölligen Walze doppelt so viel Reibung, als bei der zwölfzölligen.

Setzt man daher, daß  $M$  die gesamte Belastung einer Walze bezeichne, deren Halbmesser  $= r$  und deren wälzende Reibung  $= F$  ist. Wird ferner für eine andere Walze von gleicher Materie die ähnliche Bezeichnung  $M'$ ,  $r'$ ,  $F'$  angenommen, so verhält sich  $\frac{M'}{r'} : \frac{M}{r} = F' : F$ , und man findet die Reibung

$$F = \frac{r' F'}{M'} \cdot \frac{M}{r}.$$

Ist daher die Zahl  $\frac{r' F'}{M'}$  aus Versuchen bekannt, so kann daraus die Reibung  $F$  für jede andere Walze von gleicher Materie gefunden werden, wenn die Belastung  $M$  und der Halbmesser  $r$  gegeben ist. Man kann daher in einem ähnlichen Sinne wie §. 187. die Zahl  $\frac{r' F'}{M'} = \mu'$  setzen, und solche den Reibungskoeffizienten nennen.

Aus den vorstehenden Versuchen erhält man als Mittelwerthe für die Reibungskoeffizienten, bei  
Walzen von Guajac auf Eichenholz  $\mu' = 0,018 = \frac{1}{55}$   
Walzen von Ulmen auf Eichenholz  $\mu' = 0,03$ ,  
so daß nun ganz allgemein die wälzende Reibung durch

$$F = \mu' \frac{M}{r}$$

ausgedrückt werden kann. Man hat aber bei dem Gebrauche der Zahl  $\mu'$  darauf zu sehen, daß  $M$  in Pariser Pfunden, und  $r$  in Pariser Zollen ausgedrückt wird, weil für andere Maaße und Gewichte auch die Zahlen  $\mu'$  andere Werthe erhalten müssen.

Diese Vorsicht ist bei den Reibungskoeffizienten, welche §. 187. angegeben sind, nicht erforderlich, weil daselbst der Werth  $\mu$  unverändert derselbe bleibt, man mag denselben in irgend einem Gewichte ausdrücken, wofern nur die Belastung und Reibung sich auf ein- und dasselbe Gewicht beziehen.

## Achstes Kapitel.

### Von der schiefen Ebene, dem Reile und der Schraube.

#### I. Von der schiefen Ebene.

##### §. 191.

Taf. IV. Jede feste gegen den Horizont geneigte Ebene heißt  
Fig. 100. hier eine schiefe Ebene (*Planum inclinatum. Plan incliné*). Die schiefe Ebene  $ABB'$ , Figur 100., werde durch die Vertikalebene  $ACA'$  in  $AA'$  und durch die Horizontalebene  $CBB'$  in  $BB'$  so geschnitten, daß die Linien  $AA'$ ,  $BB'$  mit einander parallel sind, so wird man in der Folge ohne Erinnerung voraussetzen, daß die Richtungen der Kräfte, welche auf Körper wirken, die sich auf der schiefen Ebene befinden, in einerlei Vertikalebene fallen, welche auf den Durchschnittslinien  $AA'$ ,  $BB'$  winkelrecht ist.

Die Vertikalebene  $ABC$  sey auf dem Durchschnitt  $AA'$  winkelrecht, so ist  $ABC$  der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Horizontalebene, welcher hier kurz der Neigungswinkel der schiefen Ebene genannt werden soll. In der Folge wird allemal dieser Neigungswinkel  $ABC = \alpha$  gesetzt. Die Linie  $AB$  heißt die Länge,  $AC$  die Höhe, und  $BC$  die Grundlinie der schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, so wird derselbe irgend einen Druck winkelrecht auf die Länge der Ebene ausüben, dieser winkelrechte Druck soll hier der Normaldruck heißen. Die Kraft, mit welcher sich der Körper längs der schiefen Ebene fortzubewegen strebt, heißt sein relatives Gewicht.

§. 192.

**Aufgabe.** Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines auf der schiefen Ebene befindlichen Körpers zu finden, wenn die Richtung der Kräfte durch seinen Schwerpunkt geht.

**Auflösung.** Auf der schiefen Ebene  $AB$ , Figur 101., befinde sich ein Körper, dessen Schwerpunkt in  $G$  liegt, und dessen Gewicht  $Q$  nach vertikaler Richtung  $GQ$  wirkt. Ist der Körper dadurch gegen das Umfallen gesichert, daß die Vertikale  $GD$  noch innerhalb seiner Grundfläche fällt, so wird er, sich selbst überlassen, auf der schiefen Ebene nach der Richtung  $AB$  herabgleiten. Soll dies verhindert werden und ein Gleichgewicht entstehen, so wird eine im Schwerpunkte  $G$  angebrachte Kraft  $P$  nach irgend einer Richtung  $GP$  auf den Körper wirken müssen. Es sey die Neigung der schiefen Ebene  $ABC = \alpha$ , und der Winkel, unter welchem die Richtung der Kraft  $P$  die auf  $AB$  winkelrechte Linie  $GF$  in  $G$  schneidet oder  $FGP = \beta$ , so läßt sich unter der Voraussetzung, daß die auf  $AB$  winkelrechte Linie  $GF$  noch innerhalb der Grundfläche des Körpers fällt, das Gewicht  $Q$  winkelrecht auf  $AB$  nach  $GF$ , und parallel mit  $AB$  nach

Taf. IV.  
Fig. 101.



$GE$  zerlegen. Nun ist der Winkel  $DGF = EDG = \alpha$ , und daher der vom Gewichte  $Q$  auf  $AB$  entstehende Normaldruck (§. 20. I.), welcher von der Ebene  $AB$  aufgehoben wird, oder

$$GF = GD \cdot \cos DGF = Q \cos \alpha$$

und die Kraft, mit welcher sich der Körper durch die Wirkung seines Gewichtes  $Q$  längs der schiefen Ebene nach der Richtung  $GE$  fortzubewegen strebt, oder sein relatives Gewicht

$$GE = DG \cdot \sin EDG = Q \sin \alpha$$

Soll nun der Körper in Ruhe bleiben, so muß  $P$  den Körper eben so stark nach der Richtung  $BA$  aufwärts zu bewegen streben, als solches vom Gewichte  $Q$  nach der Richtung  $AB$  abwärts geschieht, weil hier die Normalpressungen nicht in Rechnung kommen können, da solche von der festen Ebene  $AB$  aufgehoben werden. Man zerlege daher die Kraft  $P$  nach  $GF$  auf  $AB$  winkelrecht, und nach  $GK$  mit  $BA$  parallel, oder dem respectiven Gewichte von  $Q$  grade entgegengesetzt, alsdann ist der Winkel

$$IGL = GIK = \beta$$

und man erhält den Normaldruck auf  $AB$ , welcher von der Kraft  $P$  entsteht (§. 20.)

$$GL = GI \cdot \cos IGL = P \cos \beta$$

und die in paralleler Richtung mit  $BA$  entstehende Wirkung

$$GK = GI \cdot \sin GIK = P \sin \beta.$$

Damit der Körper in Ruhe bleibe, muß diese Kraft dem relativen Gewichte  $Q \sin \alpha$  gleich seyn,

also  $P \sin \beta = Q \sin \alpha$ , daher findet man, wenn das Gewicht  $Q$  und die Winkel  $\alpha, \beta$  gegeben sind, für das Gleichgewicht die Kraft

$$(I) \quad P = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} Q$$

oder, wenn  $P, \alpha$  und  $\beta$  gegeben sind,

$$(II) \quad Q = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} P.$$

Nennt man den von beiden Kräften  $Q$  und  $P$  entstehenden Normaldruck  $= N$ , so ist der gesammte Normaldruck auf die Ebene  $AB = GF + GL$  oder

$$(III) \quad N = Q \cos \alpha + P \cos \beta.$$

Wird aus (I) für  $P$  sein Werth gesetzt, so ist

$$N = \left[ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta \right] Q = \frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} Q$$

oder

$$(IV) \quad N = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta} Q.$$

oder, wenn in (III) statt  $Q$  sein Werth aus (II) gesetzt wird

$$N = \left[ \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \beta \right] P = \frac{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha} P$$

oder

$$(V) \quad N = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha} P.$$

Beispiel. Eine schiefe Ebene, auf welcher sich eine Last von 1000 Pfund befindet, ist unter einem Winkel von 30 Grad gegen die Horizontalebene geneigt; man sucht die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft, welche den Körper am Herabgleiten hindert, wenn ihre Richtung mit einer auf der schiefen Ebene winkelrechten Linie einen Winkel von 75 Grad einschließt. Hier ist  $Q = 1000$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ,

$\beta = 75^\circ$ , also nach (I), wenn man sich der Logarithmen bedient,

$$\log \sin \alpha = \log \sin 30^\circ = 9,6989700$$

$$\log Q = \log 1000 = 3$$

---


$$12,6989700$$

$$\log \sin \beta = \log \sin 75^\circ = 9,9849438$$

---


$$2,7140262$$

wozu die Zahl 517,64 stimmt. Es ist daher die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft  $P = 517,64$  Pfund.

§. 193.

1. Zusatz. Weil über die Richtungen, nach welchen man Kräfte zerlegen muß, bei Anfängern leicht Zweifel entstehen können, so ist das vorhergehende Verfahren nochmals genau zu erwägen. Man hat nemlich den Punkt G, auf welchen die Kräfte P, Q wirken. Um von dieser Wirkung zu urtheilen, mußte ausgemittelt werden, nach welchen Richtungen der Punkt G ausweicht, welches wegen P nach GK, und wegen Q nach GE erfolgen würde. Ferner ist GF die einzige Richtung, nach welcher der Punkt G nicht ausweichen kann, und man hat daher die Kräfte P, Q nach solcher Richtung zerlegt, nach welcher der Punkt G sich bewegen würde, und in eine andere, nach welcher er nicht ausweichen kann. Die Nothwendigkeit dieses Verfahrens läßt sich einsehen, wenn man annimmt, die Kräfte P, Q wären nach andern Richtungen zerlegt, weil alsdann eine jede nach einer andern Richtung angenommene Seitenkraft wieder in eine solche zerlegt werden konnte, welche auf die Bewegung des Körpers wirkt, die hier eigentlich gesucht wird, und in

eine andere, welche nichts auf die Bewegung wirken kann, und wie hier von der festen Ebene AB gänzlich aufgehoben wird. Hieraus kann man die allgemeine Regel ableiten, daß es bei der Bestimmung der Wirkung einer Kraft auf einen Punkt, welcher nur nach einer gewissen Richtung bewegbar ist, darauf ankommt, diese Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wovon die eine in die Richtung fällt, nach welcher der Punkt nur ausweichen würde, und die andere, nach welcher der Punkt nicht ausweichen kann, oder nach welcher irgend ein Widerstand die zweite Seitenkraft gänzlich aufhebt.

§. 194.

2. Zusatz. Wirkt die Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel, so ist  $\beta$  ein rechter Winkel, also  $\sin \beta = 1$ , daher

$$P = Q \sin \alpha.$$

Nun ist  $\sin \alpha = \frac{AC}{AB}$ , daher verhält sich

$$Q : P = AB : AC$$

oder wenn die Richtung der Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich das Gewicht Q zur Kraft P, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

3. Zusatz. Wäre die Richtung der Kraft P horizontal, also mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel, so ist  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , also  $\sin \beta = \sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , daher §. 192. I.

$$P = Q \operatorname{tgt} \alpha.$$

Weil aber  $\operatorname{tgt} \alpha = \frac{AC}{BC}$  ist, so verhält sich

$$Q : P = BC : AC$$

oder wenn die Kraft  $P$  mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich das Gewicht  $Q$  zur Kraft  $P$ , wie die Grundlinie der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

4. Zusatz. Die Richtung der Kraft  $P$  sey horizontal, und gehe wie bisher durch den Schwerpunkt  $G$ , so läßt sich, wenn  $P$  und das Gewicht  $Q$  gegeben sind, die Lage der schiefen Ebene bestimmen, bei welcher der Körper im Gleichgewicht ist, und man erhält alsdann

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{P}{Q}.$$

Sobald  $\operatorname{tgt} \alpha$  größer oder kleiner als  $\frac{P}{Q}$  ist, kann kein Gleichgewicht entstehen, und der Körper muß sich entweder abwärts oder aufwärts auf der schiefen Ebene bewegen, weil in diesem Falle  $GE$  größer oder kleiner als  $GK$  wird.

#### §. 195.

Die Reibung zu bestimmen, welche ein Körper dessen Gewicht  $= Q$  ist, auf der schiefen Ebene verursacht, darf man nur den Normaldruck  $N$  desselben mit seinem Reibungskoeffizienten  $\mu$  (§. 187.) multiplizieren, so ist  $\mu N$  die Kraft welche nach der Richtung der schiefen Ebene zur Ueberwältigung der Reibung erfordert wird. Soll der Körper auf der schiefen Ebene unter der Bedingung in Ruhe bleiben, daß die kleinste Kraft abwärts nach der Richtung der schiefen Ebene

angebracht, denselben in Bewegung setzt, so muß offenbar die Reibung  $\mu N$  dem relativen Gewichte des Körpers (§. 191.) gleich seyn. Wäre  $\varrho$  der Richtungswinkel der Ebene welcher diesem Gleichgewichte entspricht, so ist  $Q \sin \varrho$  (§. 192.) das relative Gewicht des Körpers, daher  $\mu N = Q \sin \varrho$ , oder weil der Normaldruck  $N = Q \cos \varrho$  ist (§. 192.) so wird

$$\mu Q \cos \varrho = Q \sin \varrho \text{ oder}$$

$$\mu = \operatorname{tgt} \varrho.$$

Hierdurch erhält man ein einfaches Mittel den Reibungskoeffizienten eines Körpers für die Reibung der Ruhe zu finden, wenn man den Neigungswinkel beobachtet, unter welchem der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe bleibt, bevor er anfängt abzugleiten. Man pflegt daher auch  $\varrho$  den Reibungswinkel, Ruhewinkel oder auch den Winkel des Gleichgewichts zu nennen.

Weil dadurch daß man anstatt des Reibungskoeffizienten  $\mu$  den entsprechenden Richtungswinkel  $\varrho$  einführt, sehr oft die vorzunehmenden Rechnungen erleichtert werden, so sind in der nachstehenden Tafel für mehrere Werthe von  $\mu$ , die zugehörigen Werthe von  $\varrho$  angegeben.

## T a f e l

für die Reibungskoeffizienten  $\mu$  und die entsprechenden Reibungswinkel  $\varphi$ .

$\mu$	tg $\varphi$	$\varphi$	$\mu$	tg $\varphi$	$\varphi$
$\frac{1}{50}$	0,020 0000	1° 8' 45"	$\frac{3}{20}$	0,150 0000	8° 31' 51"
$\frac{1}{40}$	0,022 2222	1 16 23	$\frac{1}{10}$	0,153 8461	8 44 17
$\frac{1}{30}$	0,024 3902	1 23 50	$\frac{1}{15}$	0,157 8947	8 58 22
$\frac{1}{20}$	0,025 0000	1 25 55	$\frac{1}{20}$	0,166 6667	9 27 44
$\frac{1}{15}$	0,028 5714	1 38 12	$\frac{1}{10}$	0,176 4705	10 0 28
$\frac{1}{10}$	0,030 3030	1 44 9	$\frac{1}{10}$	0,181 8182	10 18 17
$\frac{1}{8}$	0,033 3333	1 54 33	$\frac{1}{10}$	0,190 4762	10 46 56
$\frac{1}{6}$	0,034 4828	1 58 30	$\frac{1}{5}$	0,200 0000	11 48 36
$\frac{1}{5}$	0,037 0370	2 7 16	$\frac{1}{5}$	0,222 2222	12 31 43
$\frac{1}{4}$	0,040 0000	2 17 26	$\frac{1}{5}$	0,240 0000	13 29 42
$\frac{1}{3}$	0,041 6667	2 23 9	$\frac{1}{4}$	0,250 0000	14 2 10
$\frac{1}{3}$	0,043 4783	2 29 22	$\frac{1}{3}$	0,266 6667	14 55 53
$\frac{1}{3}$	0,045 4545	2 36 9	$\frac{1}{3}$	0,285 7142	15 56 43
$\frac{1}{3}$	0,047 6190	2 43 34	$\frac{1}{3}$	0,300 0000	16 41 57
$\frac{1}{3}$	0,050 0000	2 51 44	$\frac{1}{3}$	0,320 0000	17 44 41
$\frac{1}{3}$	0,052 6316	3 0 46	$\frac{1}{3}$	0,333 3333	18 26 6
$\frac{1}{3}$	0,055 5556	3 10 47	$\frac{1}{3}$	0,350 0000	19 17 24
$\frac{1}{3}$	0,058 8235	3 21 59	$\frac{1}{3}$	0,357 0000	20 33 22
$\frac{1}{3}$	0,062 5000	3 34 35	$\frac{1}{3}$	0,400 0000	21 48 5
$\frac{1}{3}$	0,066 6667	3 48 50	$\frac{1}{3}$	0,416 6667	22 37 11
$\frac{1}{3}$	0,071 4286	4 5 8	$\frac{1}{3}$	0,428 5714	23 11 55
$\frac{1}{3}$	0,076 9231	4 23 55	$\frac{1}{3}$	0,461 5385	24 46 30
$\frac{1}{3}$	0,083 3333	4 45 49	$\frac{1}{3}$	0,466 6667	25 1 1
$\frac{1}{3}$	0,086 9565	4 58 11	$\frac{1}{3}$	0,500 0000	26 33 54
$\frac{1}{3}$	0,090 9091	5 11 40	$\frac{1}{3}$	0,545 4545	28 36 37
$\frac{1}{3}$	0,100 0000	5 52 38	$\frac{1}{3}$	0,583 3333	30 15 23
$\frac{1}{3}$	0,111 1111	6 20 25	$\frac{1}{3}$	0,600 0000	30 57 58
$\frac{1}{3}$	0,120 0000	6 53 34	$\frac{1}{3}$	0,625 0000	32 0 19
$\frac{1}{3}$	0,125 0000	7 7 30	$\frac{1}{3}$	0,666 6667	33 41 24
$\frac{1}{3}$	0,130 4347	7 25 53	$\frac{1}{3}$	0,700 0000	34 59 31
$\frac{1}{3}$	0,133 3333	7 35 42	$\frac{1}{3}$	0,714 2857	35 32 15
$\frac{1}{3}$	0,142 8571	8 8 12	$\frac{1}{3}$	0,750 0000	36 52 11

§. 196.

**Aufgabe.** Die Bedingungen des Gleichgewichts eines auf der schiefen Ebene befindlichen Körpers mit Rücksicht auf Reibung zu finden, wenn die Richtung der Kräfte durch seinen Schwerpunkt geht, und die anzuwendende Kraft zugleich die Reibung überwindet, oder den Körper mit dem kleinsten Ueberschuß an Kraft erheben soll.

**Auflösung.** Man setze die zur Ueberwältigung der Last und Reibung erforderliche Kraft  $= V$ , so ist mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 192. der Normaldruck auf die Ebene  $AB$ , Figur 101.,

Taf. IV.  
Fig. 101.

$$(I) \quad N = Q \cos \alpha + V \cos \beta$$

also die davon entstehende Reibung  $= \mu N$ , welche der Kraft  $V$  nach der Richtung  $AB$  widersteht. Soll nun die Kraft  $V \sin \beta$ , mit welcher die Kraft  $V$  den Körper längs der schiefen Ebene aufwärts zu bewegen strebt, mit dem relativen Gewichte  $Q \sin \alpha$  und der Reibung  $\mu N$  im Gleichgewichte seyn, so ist

$$V \sin \beta = Q \sin \alpha + \mu [Q \cos \alpha + V \cos \beta]$$

daher findet man die zur Ueberwältigung der Reibung und für das Gleichgewicht mit  $Q$  erforderliche Kraft zum Erheben

$$(II) \quad V = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \beta - \mu \cos \beta} Q$$

oder wenn man anstatt  $\mu$  den Reibungswinkel  $\rho$  (§. 195.)

einführt, so wird, wegen  $\mu = \operatorname{tgt} \rho = \frac{\sin \rho}{\cos \rho}$

$$(III) \quad V = \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\sin (\beta - \rho)} Q$$



und jede auch noch so kleine Vermehrung der Kraft  $V$  wird eine aufwärts gehende Bewegung verursachen. Wäre die Kraft  $V$  nebst  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, so findet man das Gewicht

$$(IV) \quad Q = \frac{\sin \beta - \mu \cos \beta}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} V \text{ oder auch}$$

$$(V) \quad Q = \frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)} V.$$

1. Beispiel. Auf einer schiefen Ebene, welche unter einem Winkel von 30 Grad gegen den Horizont geneigt ist, befindet sich eine Last von 1000 Pfund. Die Kraft, welche mit dieser Last und der Reibung im Gleichgewichte seyn soll, wirkt unter einem Winkel  $\beta$  von 75 Grad. Man sucht die Kraft unter der Voraussetzung, daß die Reibung dem sechsten Theile des Druckes gleich sey. Hier ist  $Q=1000$ ,  $\mu = \frac{1}{6}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$ , daher die Kraft

$$V = \frac{1000(0,5 + \frac{1}{6} \cdot 0,86603)}{0,96593 - \frac{1}{6} \cdot 0,25882} = 698,25 \text{ Pfund}$$

also 180,61 Pfund mehr als §. 192. ohne Reibung.

Wollte man die Kraft  $V$  nach (II) berechnen, so ist hier  $\varphi = 9^\circ 27' 44''$ , also  $\alpha + \varphi = 39^\circ 27' 44''$  und  $\beta - \varphi = 65^\circ 32' 16''$ , daher wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\log \sin (\alpha + \varphi) = 9,8031630$$

$$\log Q = 3$$

$$\hline 12,8031630$$

$$\log \sin (\beta - \varphi) = 9,9591533$$

$$\log V = 2,8440097 = \log 698,25 \text{ wie oben.}$$

Will man nicht bis auf Secunden genau rechnen und setzt  $\varphi = 9^\circ 28'$ , so findet man  $V = 698,34$ .

2. Beispiel. Für  $Q = 1000$ ,  $\mu = \frac{1}{6}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , und  $\beta = 120^\circ$  wird  $\sin \beta = \sin 60^\circ$  und  $\cos \beta = -\cos 60^\circ$ , daher die Kraft nach (II)

$$V = \frac{1000 (0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,86603)}{0,86603 + \frac{1}{2} \cdot 0,5} = 678,71 \text{ Pfund.}$$

Nach (III) findet man  $\alpha + \varrho = 39^\circ 27' 44''$  und  $\beta - \varrho = 110^\circ 32' 16''$  also  $\sin (\beta - \varrho) = \sin 69^\circ 27' 44''$  daher

$$\log \sin (\alpha + \varrho) = 9,8031630$$

$$\log Q = 3$$

$$\hline 12,8031630$$

$$\log \sin (\beta - \varrho) = 9,9714804$$

$$\log V = 2,8316826 = \log 678,71 \text{ wie oben.}$$

§. 197.

1. Zusatz. Für  $\beta = 90$  Grad wird die Richtung der Kraft  $V$  mit der schiefen Ebene parallel, und weil alsdann  $\sin \beta = 1$  und  $\cos \beta = 0$  ist, so erhält man die Kraft, welche zugleich die Reibung überwindet, oder

$$(I) \quad V = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) Q.$$

Beispiel. Für  $Q = 1000$  Pfund,  $\alpha = 30$  Grad, und  $\mu = \frac{1}{2}$  ist die Kraft

$$V = 1000 (0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,86603) = 644,34 \text{ Pfund.}$$

Wird die Ebene horizontal, so ist  $\alpha = 0$ , also  $V = \mu Q$ , wie erfordert wird (§. 187.).

Bei einer vertikalen Ebene ist  $\alpha = 90^\circ$ , also  $V = Q$ .

Die Kraft  $V$  erhält bei einerlei Last  $Q$  ihren größten Werth, wenn der Neigungswinkel  $\alpha$  so genommen wird, daß

$$(II) \quad \cotg \alpha = \mu$$

ist. Alsdann erhält man

$$V = Q(\sin \alpha + \cotg \alpha \cos \alpha) = Q \frac{\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2}{\sin \alpha} = Q \frac{1}{\sin \alpha}$$

oder

$$(III) \quad V = Q \operatorname{cosec} \alpha.$$

Es sey  $\mu = \frac{1}{6}$ , so ist in diesem Falle  $\cotg \alpha = 0,16666 = \cotg 80^\circ 32'$ . Für diesen Winkel ist nach (I) oder (III), wenn  $Q = 1000$  gesetzt wird

$$V = 1013,807 \text{ Pfund.}$$

Für  $\alpha = 79$  Grad ist  $V = 1013,429$  und für  $\alpha = 81$  Grad ist  $V = 1013,761$  Pfund, also in beiden Fällen kleiner als 1013,79.

Um den Werth zu finden, für welchen  $P$  am größten wird, sehe man  $\alpha$  in der Gleichung (I) als veränderlich an, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) Q = 0, \text{ also } \mu = \cotg \alpha \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = (-\sin \alpha - \mu \cos \alpha) Q \text{ eine negative Größe,}$$

folglich ist für  $\mu = \cotg \alpha$  die Kraft  $V$  ein Größtes.

Die Last  $Q$  wird daher auf einer schiefen Ebene, bei welcher die Kraft mit der Länge der Ebene parallel wirkt, den meisten Kraftaufwand zur Aufwärtsbewegung erfordern, wenn die Tangente von  $\alpha$  dem Reibungskoeffizienten  $\mu$  gleich ist.

Eine größere oder geringere Neigung der schiefen Ebene erfordert einen zur Fortbewegung der Last geringeren Kraftaufwand; den kleinsten wenn  $\alpha = 0$  oder wenn die Ebene horizontal wird, weil hier vom Abwärtsziehen nicht die Rede ist.

§. 198.

2. Zusatz. Für  $\beta = 90^\circ - \alpha$  wird die Rich-

tung der Kraft  $V$  horizontal, alsdann ist  $\sin \beta = \cos \alpha$  und  $\cos \beta = \sin \alpha$ ,

Daher §. 196. (II) die Horizontalkraft, welche zugleich der Reibung das Gleichgewicht hält

$$V = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} Q = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} Q = \frac{1 + \mu \cotg \alpha}{\cotg \alpha - \mu} Q.$$

Beispiel. Für  $Q = 1000$  Pfund,  $\alpha = 30^\circ$ , und  $\mu = \frac{1}{8}$  findet man die Kraft

$$V = \frac{(0,5773503 + \frac{1}{8}) 1000}{1 - \frac{1}{8} \cdot 0,5773503} = 823,22 \text{ Pfund.}$$

Bei einer horizontalen Lage der Ebene ist  $\alpha = 0$ , also  $V = \mu Q$ . Dagegen wird der Nenner  $1 - \mu \operatorname{tg} \alpha = 0$ , wenn  $\cotg \alpha = \mu$  ist, es muß daher in diesem Falle  $V$  unendlich groß werden. Es giebt also, wenn  $\cotg \alpha = \mu$  ist, keine Kraft, welche der Reibung und dem Gewichte  $Q$  dergestalt das Gleichgewicht halten könnte, daß bei dem geringsten Ueberschuß an Kraft eine Bewegung erfolgte.

### §. 199.

**Aufgabe.** Auf der schiefen Ebene befindet sich eine Last  $Q$ , welche durch die Reibung und eine im Schwerpunkte der Last anzubringende Kraft  $V$  am Abgleiten verhindert werden soll; wie groß muß die zum Erhalten des Körpers erforderliche Kraft  $V$  seyn, damit keine abwärts gehende Bewegung erfolgt.

**Auflösung.** Da hier die Kraft nicht mit der Last und Reibung wie §. 196., sondern die Kraft und Reibung mit der Last im Gleichgewichte seyn soll, so erhält man, wie §. 196., den Normaldruck

$$N = Q \cos \alpha + V' \cos \beta$$

also die Reibung  $= \mu N$ , daher

$$V' \sin \beta + \mu (Q \cos \alpha + V' \cos \beta) = Q \sin \alpha$$

daher die Kraft, welche das Abwärtsgleiten der Last verhindert, oder die zum Erhalten der Last erfordert wird

$$(I) \quad V' = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \beta + \mu \cos \beta} Q$$

oder wenn man  $\mu = \operatorname{tgt} \varrho$  setzt

$$V' = \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\sin (\beta + \varrho)} Q$$

und jede noch so kleine Vermehrung der Last oder Verminderung der Kraft wird das Gleichgewicht aufheben.

Wäre  $V'$  nebst  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, so findet man die Last

$$(II) \quad Q = \frac{\sin \beta + \mu \cos \beta}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} V' \text{ oder auch}$$

$$Q = \frac{\sin (\beta + \varrho)}{\sin (\alpha - \varrho)} V'.$$

**Beispiel.** Eine schiefe Ebene, unter einem Winkel von 30 Grad gegen den Horizont geneigt, ist mit einer Last von 1000 Pfund beschwert; wieviel Kraft wird man anwenden müssen, um zu verhindern, daß die Last nicht herabsinkt, wenn die Richtung der Kraft mit dem Horizont einen Winkel von 75 Grad einschließt. Hier ist  $Q = 1000$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$ , und wenn  $\mu = \frac{1}{2}$  angenommen wird, so erhält man die Kraft

$$V' = \frac{1000 (0,5 - \frac{1}{2} \cdot 0,86603)}{0,96593 + \frac{1}{2} \cdot 0,25882} = 352,46 \text{ Pfund,}$$

also 165,18 Pfund weniger als §. 192. ohne Reibung.  
§. 200.

**1. Zusatz.** Wird  $\beta = 90^\circ$ , so ist die Richtung der Kraft  $V'$  mit der Länge der schiefen

Ebene parallel, und man erhält für diesen Fall, weil  $\sin \beta = 1$  und  $\cos \beta = 0$  ist, die Kraft, welche nebst der Reibung den Körper am Herabsinken hindert, oder

$$(I) \quad V' = Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Diese Kraft wird  $= 0$ , wenn  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha = 0$ , oder wenn

$$(II) \quad \mu = \operatorname{tgt} \alpha$$

ist. In diesem Falle wird keine Kraft erfordert, den Körper in Ruhe zu erhalten, weil sein relatives Gewicht der Reibung das Gleichgewicht hält. Der Winkel  $\alpha$  heißt alsdann der Ruhewinkel (§. 195.).

Für  $\mu = \frac{1}{6}$  ist  $\operatorname{tgt} \alpha = 0,1666667 = \operatorname{tgt} 9^{\circ} 27' 44''$ , daher wird ein Körper auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel gegen den Horizont 9 Grad 27 Minuten 44 Secunden beträgt, in Ruhe bleiben, wenn die Reibung dem sechsten Theile des Drucks gleich ist. Bei einem kleinern Neigungswinkel wird Bewegung erfolgen, aber nicht wenn der Winkel bis zu 0 Grad abnimmt.

Für  $\mu = \frac{1}{3}$  ist  $\operatorname{tgt} \alpha = 0,3333333 = \operatorname{tgt} 18^{\circ} 26' 6''$ .

Beispiel. Die schiefe Ebene ist unter einem Winkel von 30 Grad gegen den Horizont geneigt, man sucht die erforderliche Kraft, welche nach paralleler Richtung mit der Länge der Ebene einer Last von 1000 Pfund das Gleichgewicht hält, wenn  $\mu = \frac{1}{6}$  ist. Hier wird  $V = 1000$ ,  $\alpha = 30$  Grad, also (I) die Kraft

$$V = 1000 (0,5 - \frac{1}{6} \cdot 0,86603) = 355,66 \text{ Pfund.}$$

§. 201.

2. Zusatz. Wenn die Richtung, nach wel-

oder die Kraft  $V'$  wirkt, horizontal oder  $\beta = 90^\circ - \alpha$  ist, so erhält man §. 199. die Kraft

$$V' = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} Q = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} Q.$$

Beispiel. Wäre  $Q = 1000$  Pfund,  $\alpha = 30^\circ$  und  $\mu = \frac{1}{2}$ , so findet man die Kraft

$$V' = \frac{1000 (0,57735 - \frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0,57735} = 374,63 \text{ Pfund.}$$

§. 202.

**Aufgabe.** Unter welchem Winkel muß die Kraft wirken, damit zum Erheben und Erhalten einer Last auf der schiefen Ebene, mit Rücksicht auf Reibung, die kleinstmögliche Kraft anzuwenden ist.

**Auflösung.** Zum Erheben einer Last wird nach §. 196. die Kraft

$$V = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \beta - \mu \cos \beta} Q = \frac{\sin (\alpha + e)}{\sin (\beta - e)} Q$$

und zum Erhalten §. 199. die Kraft

$$V = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \beta + \mu \cos \beta} Q = \frac{\sin (\alpha - e)}{\sin (\beta + e)} Q \text{ erfordert.}$$

Beide Bedingungen lassen sich ganz allgemein durch

$$V = \frac{\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha}{\sin \beta \mp \mu \cos \beta} Q = \frac{\sin (\alpha \pm e)}{\sin (\beta \mp e)} Q$$

ausdrücken, wo die obern Zeichen für das Erheben, und die untern für das Erhalten der Last gelten.

Man nehme den Winkel  $\beta$  als veränderlich an, so erhält die Kraft  $V$  ihren kleinsten Werth, wenn der Nenner  $\sin (\beta \mp e)$  am größten wird. Der größte Sinus ist aber  $\sin 90^\circ$ , daher wird  $\beta \mp e = 90^\circ$  oder

$$\beta = 90^\circ \pm e$$

wo das obere Zeichen für die kleinste Kraft zum Erheben, und das untere für die kleinste Kraft zum Erhalten der Last gilt.

Unter der Bedingung, daß  $\beta$  den vorstehenden Werth erhält, findet man die kleinste Kraft

$$V = Q \sin (\alpha \pm \varrho).$$

Für  $\alpha = 30^\circ$  und  $\mu = \frac{1}{8}$  wird  $\varrho = 9^\circ 28'$ , also die kleinste Kraft zum Erheben der Last, für  $\beta = 99^\circ 28'$ ,

$$V = Q \sin 39^\circ 28' = 0,635629 \cdot Q$$

und die kleinste Kraft zum Erhalten der Last, für  $\beta = 80^\circ 32'$ ,

$$V = Q \sin 20^\circ 8' = 0,344206 \cdot Q.$$

Kommt es lediglich darauf an, die Last  $Q$  auf der schiefen Ebene in Ruhe zu erhalten, und das Herabsinken zu verhüten, ohne auf das Gleichgewicht welches zum Erheben oder Erhalten der Last erfordert wird, Rücksicht zu nehmen, so läßt sich leicht einsehen, daß wenn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  und  $Q$  gegeben sind, eine unzählige Menge verschiedener Kräfte im Stande ist, die Last  $Q$  in Ruhe zu erhalten. Denn nicht nur die Kraft

$$V = \frac{\sin (\alpha + \varrho)}{\sin (\beta - \varrho)} Q$$

sondern auch die Kraft

$$V' = \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\sin (\beta + \varrho)} Q$$

erhält die Last  $Q$  in Ruhe, daher müssen auch alle Kräfte, welche zwischen  $V$  und  $V'$  fallen, die Last  $Q$



in Ruhe erhalten, bei jeder größern oder kleinern Kraft muß aber Bewegung erfolgen.

§. 203.

**Aufgabe.** Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein auf der schiefen Ebene befindlicher Körper in Ruhe bleibt, wenn die Kraft, welche das Gleichgewicht halten soll, nach horizontaler Richtung wirkt, ohne daß diese Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

**Auflösung.** Die Lage der gegebenen schiefen Ebene  $aA$ , Figur 102., werde durch den Neigungswinkel  $aAo = \varphi$  bestimmt, welchen die schiefe Ebene mit dem Horizont einschließt, und der Körper  $BC$ , dessen Gewicht  $Q$  ist, berühre die schiefe Ebene  $aA$  in dem einzigen Punkt  $B$ . Nach horizontaler Richtung  $CG'$  sey in  $C$  eine Kraft  $C$  dergestalt angebracht, daß die Punkte  $B$  und  $C$  in einerlei auf der Fläche  $aA$  winkelrechten Vertikalebene liegen, so soll die Kraft  $C$  mit dem Gewichte  $Q$ , welches im Schwerpunkte  $G$  nach vertikaler Richtung  $G'GQ$  wirkt, im Gleichgewichte seyn.

Weil der Körper  $BC$  nur in dem Punkte  $C$  gehalten wird, und in  $B$  auf der Ebene  $aA$  steht, so läßt sich auch die in der vertikalen Richtung  $G'Q$  wirkende Kraft  $Q$  für das Gleichgewicht nur nach Richtungen zerlegen, welche durch die Gegenwirkungen in  $B$  und  $C$  aufgehoben werden. Man zerlege daher die Kraft  $Q$  im Punkte  $G'$ , wo sich die Horizontale  $CG'$  und die Vertikale  $QG$  schneiden, nach den Richtungen

$G'C$  und  $G'B$ , setze den Winkel  $GG'B = \gamma$ , so ist die nach  $G'C$  wirkende Kraft (§. 19.)

$$= Q \frac{\sin BG'G}{\sin BG'C} = Q \frac{\sin \gamma}{\sin (90^\circ + \gamma)} = Q \operatorname{tgt} \gamma$$

und eben so groß muß die Kraft  $C$  seyn, wenn am Punkt  $C$  ein Gleichgewicht entstehen soll; dies giebt

$$(I) \quad C = Q \operatorname{tgt} \gamma.$$

Der Druck auf den Punkt  $B$  nach der Richtung  $G'B$  ist (§. 19.)

$$Q \frac{\sin CG'G}{\sin BG'C} = \frac{Q}{\cos \gamma}.$$

Diese Kraft muß von der festen Ebene  $aA$  aufgehoben werden, wenn ein Gleichgewicht entstehen soll.

Stelle nun die Richtung  $G'B$  des Drucks  $\frac{Q}{\cos \gamma}$  schief auf die Ebene  $aA$ , so zerlegt sich die Kraft  $\frac{Q}{\cos \gamma}$  winkeltrecht auf  $aA$  nach  $BN$ , und längs  $aA$  nach  $BL$ . Es ist aber, wenn  $BM$  vertikal gezogen wird, der Winkel

$$KBM = BG'G = \gamma; \quad MBA = 90^\circ - aAo = 90^\circ - \varphi;$$

$$\text{also } KBL = KBM + MBA = \gamma + 90^\circ - \varphi \text{ und}$$

$$KBN = 90^\circ - KBL = \varphi - \gamma, \text{ daher §. 20. der von}$$

$$\frac{Q}{\cos \gamma} \text{ auf } aA \text{ entstehende Normaldruck}$$

$$(II) \quad N = \frac{Q}{\cos \gamma} \cdot \cos KBN = \frac{Q \cos (\varphi - \gamma)}{\cos \gamma},$$

und wenn der Druck, mit welchem der Punkt  $B$  nach  $BL$  längs der Ebene  $aA$  getrieben wird,  $= R$  gesetzt wird

$$(III) \quad R = \frac{Q}{\cos \gamma} \cdot \sin KBN = \frac{Q \sin (\varphi - \gamma)}{\cos \gamma}.$$

Dem Normaldruck widersteht die Ebene  $aA$ , und hebt ihn gänzlich auf; dagegen wird die Kraft  $R$ , weil sie durch nichts aufgehalten wird, den Untertheil  $B$  des Körpers nach  $BA$  bewegen, und der Körper kann nur dann in Ruhe bleiben, wenn noch eine Kraft  $R$  am Untertheile des Körpers in  $B$  nach der Richtung  $BA$  angebracht wird. Nur dann ist in  $B$  keine Kraft erforderlich, wenn  $R = 0$ , also  $G'B$  auf der Ebene  $aA$  winkelrecht steht.

## §. 204.

**Kaf. IV. Fig. 102.** Sind die Entfernungen  $BE = e$  und  $CD = h$ , Figur 102., gegeben, und man soll mit Hülfe derselben und dem gegebenen Neigungswinkel  $\Phi$  der schiefen Ebene  $aA$ , die Horizontalkraft  $C$  in  $C$ , und die nach  $BA$  erforderliche Kraft  $R$  für das Gleichgewicht finden, wenn  $Q$  das Gewicht des Körpers bezeichnet, so ist  $e = h \operatorname{tg} \gamma$ , also §. 203. (I) die Horizontalkraft in  $C$ , oder

$$(I) \quad C = \frac{e}{h} Q.$$

Weil  $\sin (\Phi - \gamma) = \sin \Phi \cos \gamma - \cos \Phi \sin \gamma$  ist, so erhält man §. 203. (III)

$R = Q (\sin \Phi - \cos \Phi \operatorname{tg} \gamma)$ , oder man findet die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft, welche nach der Richtung  $BA$  wirken muß

$$(IIa) \quad R = Q (\sin \Phi - \frac{e}{h} \cos \Phi) = Q \sin \Phi - C \cos \Phi,$$

wobei zu bemerken ist, daß  $R$  negativ wird, wenn  $\frac{e}{h} \cos \Phi$  größer als  $\sin \Phi$  ist. Man muß daher diese

Kraft nach entgegengesetzter Richtung  $BA$  anbringen. Kennt man alsdann die zur Erhaltung des Gleichgewichts nach der Richtung  $BA$  erforderliche Kraft  $= R'$ , so findet sich

$$(II\ b) \quad R' = C \cos \varphi - Q \sin \varphi.$$

Es ist ferner  $\cos(\varphi - \gamma) = \cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma$ , daher nach §. 203. (II)

$N = Q (\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tgt} \gamma)$ , oder man findet den Normaldruck

$$(III) \quad N = Q \left( \cos \varphi + \frac{c}{h} \sin \varphi \right) = Q \cos \varphi + C \sin \varphi.$$

Der Druck  $N$  werde nach horizontaler Richtung  $BH$  in die Kraft  $H$ ; und nach vertikaler  $BM$  in die Kraft  $Q'$  zerlegt, so ist der Winkel  $NBM = \varphi$  und  $HBN = 90^\circ - \varphi$ , und man findet den horizontalen Druck gegen die Ebene in  $B$ , oder

$$(IV) \quad H = N \sin \varphi = Q \left( \cos \varphi + \frac{c}{h} \sin \varphi \right) \sin \varphi$$

und den Vertikaldruck in  $B$

$$(V) \quad Q' = N \cos \varphi = Q \left( \cos \varphi + \frac{c}{h} \sin \varphi \right) \cos \varphi.$$

Wäre die Kraft  $R$ , welche das Abgleiten des Punktes  $B$  nach  $A$  verhindert, nicht besonders am Körper  $BC$  angebracht, sondern statt derselben ein Hinderniß in der Ebene  $aA$ , etwa eine Hervorragung, Reibung u. dgl. vorhanden, so daß sich der Körper  $BC$  zwar um  $B$  bewegen, aber nicht davon entfernen kann, so muß nunmehr die ganze Kraft  $\frac{Q}{\cos \gamma}$ , welche aus den Kräften  $C$  und  $Q$  nach  $G'B$  entspringt, von der Ebene aufgehoben werden. Diese Kraft ist

$= \frac{Q}{\cos \gamma}$ , und man erhält daher, wenn die ganze Wirkung, welche aus den Kräften C und Q entspringt, von der Ebene aA aufgehoben wird, den Horizontaldruck in B, oder

$$(VI) \quad H = \frac{Q}{\cos \gamma} \cdot \sin \gamma = \frac{c}{h} Q = C$$

und eben so findet man den Vertikaldruck

$$(VII) \quad Q' = \frac{Q}{\cos \gamma} \cdot \cos \gamma = Q.$$

Wenn daher die schiefe Ebene aA die Wirkung der Kräfte Q und C aufhebt, so ist der Vertikaldruck in B dem Gewichte Q des Körpers, und der Horizontaldruck H in B, dem Horizontaldruck C gleich.

Endlich erhält man noch aus (II a)

$$R = Q \sin \Phi - C \cos \Phi \text{ und aus (III)}$$

$N = Q \cos \Phi + C \sin \Phi$ ; werden beide Gleichungen quadriert und zusammen addirt, so ist

$$(VIII) \quad R^2 + N^2 = Q^2 + C^2$$

welches man auch aus der Figur ableiten konnte, weil die im Punkt G' wirkenden Kräfte mit den im Punkte B im Gleichgewichte seyn müssen.

§. 205.

Zusatz. Wird der Winkel  $\Phi = 0$ , oder liegt  
 Taf. IV. die Ebene aA, Figur 102., auf welche sich der Körper  
 Fig. 102. BC stützt, wagerecht, so ist  $\sin \Phi = 0$  und  
 $\cos \Phi = 1$ , daher das Gewicht des Körpers

$$(I) \quad Q = \frac{h}{c} C.$$

Die Kraft, mit welcher der Körper nach der horizontalen Richtung BA wirkt

$$R = - \frac{c}{h} Q$$

der wenn sich  $R$  auf die entgegengesetzte Richtung  $Ba$  zieht, so findet man den Horizontaldruck

$$(II) \quad R' = C = \frac{c}{h} Q.$$

Der Normaldruck ist

$$(III) \quad N = Q.$$

Die aus diesem Normaldruck entspringende Horizontalkraft

$$H = 0$$

und endlich der Vertikaldruck

$$(IV) \quad Q' = Q.$$

§. 206.

Wirken außer den Kräften  $Q$  und  $C$  keine andere auf den Körper, welcher sich auf der schiefen Ebene befindet, so muß die Kraft  $R = 0$  werden, wenn der Körper ohne Reibung auf der Ebene im Gleichgewichte bleiben soll. Dies ist der Fall, wenn §. 203. (III)  $\sin(\varphi - \gamma) = 0$ , also wenn  $\varphi = \gamma$  ist. Für diesen Fall sey Figur 102.  $a'A'$  die Lage der schiefen Taf. IV. Ebene und ihr Neigungswinkel  $a'A'o' = \alpha$ , so ist, Fig. 102. wenn  $BD$  horizontal und  $CD$  vertikal gezogen, und der Abstand der Vertikale  $GQ$  von  $B$  oder  $BE = e$ , und die Höhe des Punktes  $C$  über der Horizontale  $BD$ , oder  $CD = h$  gesetzt wird,  $e = h \operatorname{tgt} \gamma$ , oder weil  $\operatorname{tgt} \gamma = \operatorname{tgt} \alpha$  ist,

$$(I) \quad \operatorname{tgt} \alpha = \frac{e}{h}$$

welches die erste Bedingung für das Gleichge-

wicht des Körpers auf der schiefen Ebene  $A'a'$  ist, wenn alle Hindernisse der Bewegung, wodurch das Abgleiten gehemmt werden könnte, bei Seite gesetzt werden.

Als zweite Bedingung erhält man §. 203. I

$$(II) \quad C = Q \operatorname{tgt} \alpha, \text{ oder auch } Q = C \cot g \alpha$$

Ist daher durch die Größen  $e$  und  $h$  die Stellung eines Körpers bekannt, so kann daraus die Neigung der schiefen Ebene und die Horizontalkraft  $C$  für das Gleichgewicht gefunden werden. Wird hingegen  $\operatorname{tgt} \alpha > \frac{C}{Q}$ , so muß der Körper abwärts gleiten, und wenn  $\operatorname{tgt} \alpha < \frac{C}{Q}$  ist, so erfolgt eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung.

Der Normaldruck auf die Ebene  $A'a'$  sey  $N$ , so erhält man für  $R = 0$ ,  $\gamma = \alpha$ , daher ist nach §. 203.

(II) der Normaldruck

$$(III) \quad N = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

Dieser Normaldruck werde nach horizontaler Richtung  $BH$  in eine Kraft  $H$ , und nach vertikaler  $BM$  in eine Kraft  $Q'$  aufgelöst, so erhält man (§. 20.) den Horizontaldruck in  $B$

$$(IV) \quad H = N \sin \alpha = Q \operatorname{tgt} \alpha = C$$

und den Vertikaldruck in  $B$

$$(V) \quad Q' = N \cos \alpha = Q.$$

Es ist daher der Horizontaldruck  $C$  in  $C$  eben so groß, als der Horizontaldruck in  $B$ , und der Vertikaldruck in  $B$  ist dem Gewichte des Körpers gleich.

## §. 207.

Die §. 203. gefundenen allgemeinen Sätze lassen sich eben so ableiten, wenn man die Lehre vom Hebel oder das §. 69. erwiesene Grundgesetz der Statik anwendet.

Wird die Lehre vom Hebel angewandt, so sey mit Beibehaltung der im vorigen §. angenommenen Bezeichnung, nach Figur 103.,  $ED = c$ , der Winkel  $BCD = \omega$ , und die verlängerte Vertikallinie  $QG$  schneide  $BC$  in  $G'$ , so wird vom Gewichte  $Q$  auf die Punkte  $C$  und  $B$  ein vertikaler Druck entstehen, welcher sich wie  $G'B : G'C$  oder wie  $EB : ED$  oder wie  $e : c$  verhält. (§. 42.) Es ist daher der vertikale Druck in  $C$

$$= \frac{eQ}{e + c}$$

und der vertikale Druck in  $B$

$$= \frac{cQ}{e + c}$$

Der vertikale Druck in  $C$  werde nach horizontaler Richtung  $CC'$  in eine Kraft  $C$ , und nach der Richtung  $CB$  in eine Kraft  $K$  zerlegt, so ist (§. 19.)

$$C = \frac{eQ}{e + c} \operatorname{tgt} \omega \quad [\text{I}] \text{ und}$$

$$K = \frac{eQ}{(e + c) \cos \omega}$$

Der vertikale Druck in  $B$  kann nach der Richtung  $BA$  und winkelrecht auf  $aA$  nach  $BN$  zerlegt werden, und weil  $ABM = 90^\circ - \varphi$  und  $MBN = \varphi$ , so erhält man §. 19. den Druck nach der Richtung  $BA$



$$= \frac{cQ}{e+c} \sin \varphi$$

und nach der Richtung BN den Normaldruck

$$= \frac{cQ}{e+c} \cos \varphi.$$

Von der Kraft K, welche in B nach der Richtung BI wirkt, entsteht ebenfalls ein Druck nach BA, und ein Normaldruck nach BN, und weil der Winkel  $ABM = 90^\circ - \varphi$ ,  $MBK = \omega$ , also  $ABK = 90^\circ - \varphi + \omega$  und  $KBN = \varphi - \omega$  ist, so erhält man die Kraft nach der Richtung BA =

$$K \cdot \sin (\varphi - \omega) = \frac{eQ \sin (\varphi - \omega)}{(e+c) \cos \omega}$$

und den von I nach der Richtung BN entstehenden Normaldruck =

$$K \cdot \cos (\varphi - \omega) = \frac{eQ \cos (\varphi - \omega)}{(e+c) \cos \omega}.$$

Beide Pressungen nach BA zusammengenommen geben die Kraft

$$R = \frac{cQ \sin \varphi}{e+c} + \frac{eQ \sin (\varphi - \omega)}{(e+c) \cos \omega} = \frac{c \sin \varphi + e \sin \varphi - e \cos \varphi \operatorname{tg} \omega}{e+c} Q \quad [\text{II}]$$

wenn nemlich  $\cos (\varphi - \omega)$  aufgelöst und der ganze Ausdruck abgekürzt wird.

Die beiden Pressungen nach der Richtung BN geben für den gesammten Normaldruck auf Aa

$$N = \frac{cQ \cos \varphi}{e+c} + \frac{eQ \cos (\varphi - \omega)}{(e+c) \cos \omega} = \frac{c \cos \varphi + e \cos \varphi + e \sin \varphi \operatorname{tg} \omega}{e+c} Q \quad [\text{III}].$$

Um zu übersehen, daß die Ausdrücke [I], [II], [III] mit den §. 204. gefundenen übereinstimmen, ist zu erwägen, daß  $BD = CD \operatorname{tg} \omega$  oder  $e+c = h \operatorname{tg} \omega$  ist, dies giebt

$$c = h \operatorname{tgt} \omega - e;$$

wird dieser Werth statt  $c$  in die Gleichung [I] gesetzt, so erhält man wie im vorigen §.

$$(I) \quad C = \frac{e}{h} Q.$$

Eben diesen Werth statt  $c$  in [II] gesetzt, giebt

$$(II) \quad R = (\sin \varphi - \frac{e}{h} \cos \varphi) Q.$$

Auf gleiche Art findet man aus [III]

$$(III) \quad N = (\cos \varphi + \frac{e}{h} \sin \varphi) Q.$$

§. 208.

Will man das Grundgesetz der Statik §. 69. anwenden, um eine Vergleichung zwischen den Kräften  $Q, C, R, N$  zu erhalten, so sind drei Gleichungen erforderlich, um jeden einzelnen Werth aus einem gegebenen zu bestimmen. Man setze daher, daß der Körper  $BC$ , Figur 104., in die parallele Lage  $B'C'$  komme, und daß der Punkt  $B'$  in die Ebene  $Aa$  falle, so sind die nach parallelen Richtungen zurückgelegten Wege, von  $Q = gG$ , von  $C = -cC$ , von  $R = -BB'$  und von  $N = 0$ , also §. 69.

Zaf. IV.  
Fig. 104.

$Q \cdot gG - C \cdot cC - R \cdot BB' = 0$ , oder wenn  $BB' = GG' = CC' = 1$  gesetzt wird, so ist  $gG = \sin \varphi$  und  $cC = \cos \varphi$ , daher

$$Q \sin \varphi - C \cos \varphi - R = 0 \quad [I].$$

Um zur zweiten Gleichung zu gelangen, nehme man an, daß  $BC$  in die parallele Lage  $B'C''$  komme, so daß  $C''$  in die verlängerte Vertikallinie  $DC$  fällt, so ist der Weg von  $Q = -GG''$ , von  $C = 0$ , von  $R = bB$  und von  $N = bB''$ , also

$R \cdot bB - Q \cdot GG' + N \cdot bB' = 0$ , oder wenn man  $GG' = BB' = CC' = 1$  setzt, so ist  $bB = \sin \Phi$  und  $bB' = \cos \Phi$ , daher

$$R \sin \Phi - Q + N \cos \Phi = 0 \quad [\text{II}]$$

und wenn endlich angenommen wird, daß der Punkt B unverändert an derselben Stelle bleibt, so daß BC in die Lage  $BC''$  kommt, wobei die Bogen  $CC''$  und  $GG''$  so äußerst klein angenommen werden, daß man sie als grade Linien in Rechnung bringen kann, so ist  $g'G''$  der Weg von Q, und  $c'C$  der Weg von C, die Wege von R und N aber  $= 0$ , daher

$$C \cdot c'C - Q \cdot g'G'' = 0.$$

Es ist ferner der Voraussetzung gemäß in den ähnlichen rechtwinklichten Dreiecken  $g'GG''$  und  $c'CC''$  der Winkel  $g'GG'' = c'CC'' = \omega$ , und weil sich verhält

$$GG'' : CC'' = BE : BD = e : e + c, \text{ so ist}$$

$$CC'' = \frac{e+c}{e} \cdot GG'', \text{ folglich}$$

$$c'C = CC'' \cos \omega = \frac{e+c}{e} \cdot GG'' \cdot \cos \omega \text{ und } g'G'' = GG'' \cdot \sin \omega, \text{ daher}$$

$$C \cdot \frac{e+c}{e} \cdot GG'' \cdot \cos \omega - Q \cdot GG'' \sin \omega = 0 \text{ oder } \frac{e+c}{e} C - Q \operatorname{tgt} \omega = 0. \text{ Es ist aber}$$

$$BD = CD \cdot \operatorname{tgt} \omega \text{ oder } e + c = h \operatorname{tgt} \omega; \text{ dies giebt}$$

$$C \frac{h \operatorname{tgt} \omega}{e} - Q \operatorname{tgt} \omega = 0, \text{ oder}$$

$$(I) \quad C = \frac{e}{h} Q.$$

Diesen Werth in die Gleichung [I] gesetzt, giebt

$$(II) \quad R = Q \sin \Phi - \frac{e}{h} Q \cos \Phi$$

und diesen Werth in [II] gesetzt und abgetürzt, giebt

$$(III) \quad N = Q \cos \varphi + \frac{e}{h} Q \sin \varphi.$$

§. 209.

**Aufgabe.** Ein schwerer Viertelkreis oder Quadrant soll dergestalt auf eine schiefe Ebene gestellt werden, daß eine am Obertheil desselben angebrachte Horizontalkraft ein Gleichgewicht hervorbringe; man sucht die Größe dieser Kraft und die Lage der schiefen Ebene, vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt vom Viertelkreise mit dem Stützpunkt auf der schiefen Ebene in einerlei Horizontale falle.

**Auflösung.** Des Viertelkreises  $CFB$ , Figur Taf. IV. 105., Halbmesser sey  $CD = DB = r$ , sein Gewicht Fig. 106.  $Q$  und sein Schwerpunkt liege in  $G$ . Für die Vertikale  $GE$  sey  $BE = e$ , und der gesuchte Winkel, welchen die schiefe Ebene  $BO$  mit der Vertikale  $CO$  einschließen muß, oder  $BOC = \alpha$ . Nach §. 85. (I) ist

$$BE = e = r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0,36338 r.$$

Hieraus erhält man für den Neigungswinkel der schiefen Ebene, auf welcher der Viertelkreis im Gleichgewichte ist (§. 206. I.)

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{e}{r} = 0,36338 = \operatorname{tgt} 19^\circ 58\frac{1}{2}'.$$

Die in  $C$  für das Gleichgewicht erforderliche Horizontalkraft ist alsdann (§. 206. II)  $C = \frac{e}{r} Q$ , oder

$$C = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) Q = 0,36338 Q$$

oder beinahe  $C = \frac{1}{4} Q$

und eben so groß ist der Horizontaldruck im Punkte  $B$ .

Wäre das Gewicht des Viertelkreises durch seine Länge ausgedrückt, so ist  $Q = \frac{\pi}{2} r$ , daher die Horizontalkraft

$$C = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) r = 0,570796 r$$

oder beinahe  $C = \frac{1}{2} r$ .

§. 210.

Zaf. IV.  
Fig. 106.

Zusatz. Wäre der Bogen CB, Figur 106.; ein Theil desjenigen Viertelkreises, dessen Scheitel in C liegt, die Länge des Bogens BC = v, sein Gewicht = Gv; CD = x, BD = y, der Halbmesser = r und BE = e der Horizontalabstand des Schwerpunkts, so ist §. 84. I.

$$e = y - \frac{rx}{v}$$

also §. 206. I. für den Neigungswinkel  $\alpha$  der schiefen Ebene BO

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{y}{x} - \frac{r}{v}$$

und für die zur Erhaltung des Gleichgewichts in C oder B erforderliche Horizontalkraft §. 204. I.

$$C = \left( \frac{y}{x} - \frac{r}{v} \right) Gv = \left( \frac{yv}{x} - r \right) G.$$

Je kleiner x wird, desto näher wird  $y = v$ , und endlich für  $x = 0$  wird  $y = v$ , also  $\frac{yv}{x} = \frac{y^2}{x} = \frac{2rx - x^2}{x} = 2r - x$ , oder weil  $x = 0$ , so wird  $\frac{yv}{x} = 2r$ . Dies in die vorstehende Gleichung gesetzt, giebt für  $x = 0$

$$C = (2r - r) G = r G$$

oder der Horizontaldruck von dem letzten Kreiselemente bei C ist  $= rG$ , also eine beständige Größe.

§. 211.

**Aufgabe.** Auf der schiefen Ebene  $aA$ , Figur 102., befinde sich der Körper  $BC$ , die Richtung der in C erforderlichen Horizontalkraft  $C$  gehe nicht durch den Schwerpunkt; man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen der Kraft  $C$ , dem Gewichte  $Q$  des Körpers  $BC$ , und der Reibung bei B, damit der Körper am Herabsinken nach  $BA$  verhindert werde. Kaf. IV.  
Fig. 102.

**Auflösung.** Der Neigungswinkel der Ebene sey  $aAo = \varphi$ , und  $GE$  die durch den Schwerpunkt des Körpers  $BC$  gezogene Vertikale;  $BE = e$  und  $CD = h$ , so ist der Normaldruck in B §. 204. III. oder

$$N = \left( \cos \varphi + \frac{e}{h} \sin \varphi \right) Q = Q \cos \varphi + C \sin \varphi$$

und die davon entstehende Reibung

$$\mu N = \mu Q \left( \cos \varphi + \frac{e}{h} \sin \varphi \right).$$

Die Kraft, mit welcher der Körper in B nach  $BA$  abwärts zu gehen strebt, ist §. 204. II.

$$R = \left( \sin \varphi - \frac{e}{h} \cos \varphi \right) Q.$$

Soll zwischen dieser Kraft und der Reibung dergestalt ein Gleichgewicht erfolgen, daß die geringste Kraft den Körper nach  $BA$  bewegen kann, oder daß durch die geringste Vergrößerung des Winkels  $\varphi$  der Körper herabsinkt, so wird erfordert, daß  $R = \mu N$  sey; man erhält daher für diese Bedingung

$$\sin \varphi - \frac{e}{h} \cos \varphi = \mu \cos \varphi + \frac{\mu e}{h} \sin \varphi, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tgt} \Phi - \frac{e}{h} = \mu + \frac{\mu e}{h} \operatorname{tgt} \Phi \text{ oder}$$

man findet den Winkel  $\Phi$ , unter welchem die schiefe Ebene gegen die Vertikale geneigt seyn kann, ohne ein Herabsinken des Körpers zu befürchten,

$$(I) \quad \operatorname{tgt} \Phi = \frac{e + \mu h}{h - \mu e} \text{ und}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{\operatorname{tgt} \Phi - \mu}{1 + \mu \operatorname{tgt} \Phi}.$$

Nach §. 204. I. ist ferner die Horizontalkraft  $C = \frac{e}{h} Q$ , daher für den vorliegenden Fall

$$(II) \quad C = \frac{\operatorname{tgt} \Phi - \mu}{1 + \mu \operatorname{tgt} \Phi} Q$$

und eben so groß ist der Horizontaldruck in B (§. 204. VI), so wie der Vertikaldruck in B dem Gewichte  $Q$  des Körpers  $BC$  gleich ist.

### §. 212.

1. Zusatz. Sucht man die Bedingungen, unter  
 Taf. IV. welchen der Körper  $CB$ , Figur 102., nach der auf-  
 Fig. 102. wärts gehenden Richtung nicht ausgleitet, so muß die Kraft, mit welcher er nach  $Ba$  zu gehen strebt, mit der Reibung im Gleichgewichte seyn. Nach §. 204. II. findet man die Kraft, mit welcher der Körper nach  $Ba$  zu gleiten strebt, oder

$$R = \left( \frac{e}{h} \cos \Phi - \sin \Phi \right) Q$$

wird diese  $= \mu N$  gesetzt, so erhält man

$$\frac{e}{h} \cos \Phi - \sin \Phi = \mu \cos \Phi + \frac{\mu e}{h} \sin \Phi$$

und hieraus findet man den Winkel  $\Phi$ , unter welchem

der Körper noch in Ruhe bleibt, und nach B a nicht ausgleiten kann

$$(I) \quad \operatorname{tgt} \varphi = \frac{e - \mu h}{h + \mu e} \text{ und}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{\operatorname{tgt} \varphi + \mu}{1 - \mu \operatorname{tgt} \varphi}.$$

Wird  $\varphi$  größer als der gefundene Werth, so muß der Körper ausgleiten.

Weil  $C = \frac{e}{h} Q$  ist, so erhält man die Horizontalkraft

$$(II) \quad C = \frac{1 + \mu \operatorname{tgt} \varphi}{\operatorname{tgt} \varphi - \mu} Q.$$

§. 213.

2. Zusatz. Bezeichnet man die abwärts gehende Bewegung des Körpers nach B A durch absinken, und die aufwärts gehende Bewegung nach B a durch aufsteigen, so ist ganz allgemein

$$(I) \quad \operatorname{tgt} \varphi = \frac{e \pm \mu h}{h \mp \mu e} \text{ und}$$

$$(II) \quad C = \frac{\operatorname{tgt} \varphi \mp \mu}{1 \pm \mu \operatorname{tgt} \varphi} Q$$

wo die obern Zeichen für absinken, und die untern für aufsteigen gelten. Ein Körper kann daher nur auf der schiefen Ebene in Ruhe bleiben, wenn die Werthe von  $\varphi$  und  $C$  innerhalb der vorstehenden Grenzen fallen.

Beispiel. Ein Körper, dessen Gewicht 1000 Pfund beträgt, soll in einer gegebenen Lage auf eine schiefe Ebene gestellt werden, so daß  $e = 4$  und  $h = 10$  Fuß ist. Man sucht die möglichen Stellungen der schiefen Ebene, bei welchen der Körper noch in Ruhe bleibt.

Hier ist  $Q = 1000$ ,  $e = 4$ ,  $h = 10$ , und wenn  $\mu = \frac{1}{2}$  gesetzt wird, so erhält man



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \pm \frac{1}{2} \cdot 10}{10 \mp \frac{1}{2} \cdot 4} = \begin{cases} 0,60714 = \operatorname{tg} 31^\circ 16' \\ 0,21875 = \operatorname{tg} 12^\circ 20' \end{cases}$$

der Körper wird also unter einem Winkel von 31 Grad 16 Minuten noch nicht absinken, und unter einem Winkel von 12 Grad 20 Minuten noch nicht aufsteigen, oder bei allen möglichen Lagen der schiefen Ebene, wo  $\varphi$  nicht kleiner als  $12^\circ 20'$ , und nicht größer als  $31^\circ 16'$  ist, muß der Körper in Ruhe bleiben.

## §. 214.

**Aufgabe.** Auf dem wagerechten Boden BD, **Kaf. IV.** Figur 107., steht eine Stange oder Leiter BC, welche **Fig. 107.** bei C gegen die vertikale Wand CD so angelehnt ist, daß die Punkte B, C in einerlei auf der Wand CD winkelfrechten Vertikalebene liegen. In E hängt eine Last Q; man sucht die möglichst geneigte Stellung der Leiter, damit solche noch durch die Reibung in B und C am Ausgleiten nach BH verhindert werde.

**Auflösung.** Die Länge BC sey  $a$ ,  $BE = b$ , der Schwerpunkt der Leiter liege in der Mitte von BC in G, so ist  $BG = \frac{1}{2} a$ . Das Gewicht der Leiter sey  $W$ , und für den Fall, daß ein Gleichgewicht mit der Reibung in B und C erfolgt, sey der Winkel, welchen die Leiter mit der vertikalen Wand einschließt, oder  $BCD = \psi$ .

Der Horizontaldruck in C sey  $C$ , und der Vertikaldruck in B  $= N$ , so ist die Reibung in C  $= \mu C$ , in B  $= \mu N$ , wovon erstere nach der Richtung DC und letztere nach BD eben so wirken, als wenn Kräfte  $\mu C$  und  $\mu N$  nach diesen Richtungen angebracht wären. Werden nun statt der Wand CD und des Bo-

dens  $BD$  die Kräfte  $C$  und  $N$  angebracht, so müssen, wenn die Leiter in Ruhe bleiben soll, die Kräfte  $\mu C$ ,  $C$ ,  $Q$ ,  $W$ ,  $\mu N$  und  $N$  einander das Gleichgewicht halten.

Man setze, daß  $BC$ , Figur 108., in die parallele Lage  $B'C'$  komme, so daß  $BB'$  vertikal und  $= 1$  sey, so ist der Weg, welchen  $Q$  nach paralleler Richtung (§. 35.) durchlaufen hat,  $= 1$ , der Weg von  $C = 0$ , von  $\mu C = -CC' = -1$ , von  $Q = EE' = 1$ , von  $W = GG' = 1$ , von  $\mu N = 0$ , und von  $N = -BB' = -1$ , daher §. 69.

Taf. IV.  
Fig. 108.

$$-\mu C + Q + W - N = 0, \text{ also } N + \mu C = Q + W [I].$$

Kommt  $BC$  in die parallele Lage  $B''C''$ , so daß  $BB''$  wagerecht und  $= 1$  wird, so ist der Weg von  $C = -CC'' = -1$ , von  $\mu N = BB'' = 1$ , die übrigen Wege aber  $= 0$ , daher

$$-C + \mu N = 0 \text{ oder } C = \mu N.$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit [I] den Vertikaldruck

$$(I) \quad N = \frac{Q + W}{1 + \mu^2}$$

und den Horizontaldruck

$$(II) \quad C = \frac{\mu (Q + W)}{1 + \mu^2}.$$

Um den Winkel  $\psi$  zu bestimmen, setze man, daß sich  $BC$  um  $B$  drehe und in die Lage  $BC'''$  komme, so daß der Winkel  $CBC'''$  nur äußerst klein sey. Man ziehe die Horizontalen  $Cc$ ,  $Ee$ ,  $Gg$ , und die Vertikalen  $C'''c$ ,  $E'''e$ ,  $G'''g$ , so sind die Dreiecke  $CC'''c$ ,

$EE''e$ ,  $GG''g$  und  $BCD$  einander ähnlich, also der Winkel

$C''Co = E'''Ee = GG''g = \psi$ , daher für  $CC'' = \delta$ ,  
 $EE'' = \frac{b\delta}{2}$  und  $GG'' = \frac{1}{2}\delta$ , also

$$Co = \delta \cos \psi; cC'' = \delta \sin \psi;$$

$$eE'' = \frac{b\delta}{2} \sin \psi; gG'' = \frac{1}{2}\delta \sin \psi.$$

Nun ist der nach paralleler Richtung zurückgelegte Weg von der Kraft  $C \triangleq cC$ , von  $\mu C = cC''$ , von  $Q = -eE''$ , von  $W = -gG''$ , von  $\mu N$  und  $N = 0$ , daher §. 69.

$$C\delta \cos \psi + \mu C\delta \sin \psi - Q\frac{b\delta}{2} \sin \psi - \frac{1}{2}W\delta \sin \psi = 0$$

oder mit  $\frac{a}{\delta \cos \psi}$  multipliziert, und für  $C$  seinen Werth

$$\frac{\mu(Q+W)}{1+\mu^2}$$

gesetzt, giebt

$$\frac{\mu a(Q+W)}{1+\mu^2} + \frac{\mu^2 a(Q+W)}{1+\mu^2} \operatorname{tgt} \psi - bQ \operatorname{tgt} \psi - \frac{aW}{2} \operatorname{tgt} \psi = 0.$$

Hieraus findet man den Winkel  $\psi$ , unter welchem die Leiter noch nicht ausgleiten kann

$$(III) \quad \operatorname{tgt} \psi = \frac{\mu a(Q+W)}{(1+\mu^2)(bQ + \frac{1}{2}aW) - \mu^2 a(Q+W)}.$$

Wird der Winkel  $\psi$  nur etwas größer angenommen als der vorstehende Ausdruck angiebt, so muß die Leiter ausgleiten.

Hängt die Last  $Q$  in der Mitte der Leiter, so wird  $b = \frac{1}{2}a$ , daher in diesem Falle

$$(IV) \quad \operatorname{tgt} \psi = \frac{2\mu}{1-\mu^2}.$$

Es wird daher ein Stab, dessen Schwerpunkt in seiner Mitte liegt, wenn man ihn auf horizontalem

Boden gegen eine vertikale Wand lehnt, nothwendig ausgleiten müssen, wenn die Tangente des Neigungswinkels, welchen der Stab mit der Wand bildet, größer als  $\frac{2\mu}{1-\mu^2}$  ist; vorausgesetzt daß die Reibung auf dem Boden und an der Wand einerlei sey.

Beispiel. Eine 20 Fuß lange Leiter soll in einer Entfernung von 15 Fuß mit 300 Pfund belastet werden, unter welchem Winkel wird man sie gegen eine vertikale Wand stellen können, wenn die Leiter 200 Pfund wiegt, und die Reibung dem dritten Theile des Drucks gleich ist.

Weil hier  $Q = 300$ ,  $W = 200$  Pfund;  $a = 20$ ,  $b = 15$  Fuß und  $\mu = \frac{1}{3}$  ist, so erhält man

$$\operatorname{tgt} \psi = \frac{\frac{2}{3} \cdot 500}{\frac{2}{3} \cdot 6500 - \frac{2}{3} \cdot 500} = 0,5454 = \operatorname{tgt} 28^\circ 37'.$$

§. 215.

Zusatz. Wird die Last  $Q = 0$ , so ist

$$\operatorname{tgt} \psi = \frac{2\mu}{1-\mu^2}, \text{ und für } Q = \infty \text{ ist}$$

$$\operatorname{tgt} \psi = \frac{\frac{a}{b} \mu}{1 - \left(\frac{a}{b} - 1\right) \mu^2}. \text{ Letzterer Ausdruck ist}$$

größer als der erste, wenn  $\frac{a}{b} > 2$ , und kleiner als der erste wenn  $\frac{a}{b} < 2$  ist; oder wenn die Last  $Q$  unterhalb der Mitte der Leiter (näher bei B als bei C) aufgehängt ist, so wird  $\psi$  mit  $Q$  wachsen; wenn aber die Last  $Q$  oberhalb der Mitte der Leiter hängt, so wird  $\psi$  mit  $Q$  abnehmen.

Bei unveränderter Last  $Q$  wächst  $\psi$ , wenn  $b$  abnimmt, oder der Winkel  $\psi$  kann desto größer werden, je näher die Last am Boden hängt.

## II. Vom Keile.

## §. 216.

**Taf. IV. Fig. 109.** Ein fester prismatischer Körper, dessen Querschnitt ein Dreieck  $ABC$ , Figur 109., bildet, heißt ein Keil (*Cuneus. Coin*), dessen man sich zum Auseinander-treiben oder Spalten anderer Körper bedient. Befindet sich der Keil zwischen zwei Körpern, welche dem Eindringen desselben widerstehen, oder in der Spalte  $EHF$  eines Körpers  $EHFIKLN$ , so läßt sich nach den Bedingungen fragen, unter welchen die Kraft, welche den Keil eintreibt, mit dem Widerstande des Körpers im Gleichgewichte ist. Setzt man  $AC = BC$ , so ist  $AB$  der Rücken,  $BC = AC$  die Seiten, und die auf  $AB$  winkelrechte Linie  $CD$  die Länge des Keils.

Der Körper  $NK$  widerstehe bei jedem der Punkte  $E, F$ , welche von  $C$  gleich weit entfernt sind, mit einer Kraft  $R$  dem Eindringen des Keils dergestalt, daß die Richtung des Widerstandes auf die Seiten  $AC, BC$  winkelrecht gehe, so werden sich diese Richtungen  $EG$  und  $FG$  in einem Punkte  $G$  schneiden, welcher in der Länge  $DC$  liegt, weil  $CE = CF$  ist. Es muß daher irgend eine Kraft  $Q$  nach der Richtung  $DG$  angebracht mit den Widerständen  $R, R$  im Gleichgewichte seyn. Der Winkel  $ACD = DCB$  sey  $= \alpha$ , so ist  $EGC = CGF = 90^\circ - \alpha$ , und die drei Kräfte  $Q, R, R$  wirken auf den Punkt  $G$  unter gegebenen Winkeln, daher ist §. 21. II.

$$Q = 2 R \cos (90^\circ - \alpha) = 2 R \sin \alpha \text{ und}$$

$$R = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$$

oder weil  $\sin \alpha = \frac{AD}{AC}$ , also  $2 \sin \alpha = \frac{AB}{AC}$  ist, so verhält sich

$$Q : R = AB : AC,$$

d. h. die Kraft, welche den Keil eintreibt, verhält sich zum Widerstande auf der einen Seite desselben, wie der Rücken des Keils zu seiner Seite.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist lediglich vorausgesetzt, daß die Richtung des Widerstandes winkelrecht auf die Seiten des Keils gehe, welches man auch die Regel des Borelli nennt. Wird angenommen, daß die Richtung des Widerstandes horizontal oder auf die Länge des Keils winkelrecht stehe, so erhält man des Mersenni Regel; auch läßt sich in gewissen Fällen mit de la Hire annehmen, daß die Richtung des Widerstandes auf den Spalten EH und FH winkelrecht sey. Uebrigens läßt sich von den zuletzt angeführten Vorstellungsarten wenig Gebrauch machen, und weil die Ausführung der Rechnung sehr leicht ist, so kann solche hier wegbleiben.

§. 217.

**Aufgabe.** Zwischen zwei festen Ebenen A'I, B'I, Figur 110., wovon die eine A'I vertikal ist, sey Taf. IV. ein Keilstück ABB'A', dessen Gewicht = Q ist, so Fig. 110. eingeklemmt, daß die Seiten AA', BB' desselben genau die Ebenen berühren; man sucht die Pressun-

gen, welche vom Gewichte  $Q$  gegen beide Ebenen entstehen.

**Auflösung.** Das Gewicht  $Q$ , welches in der durch den Schwerpunkt gezogenen Vertikale  $GQ$  wirkt, läßt sich auf  $AA'$  und  $BB'$  dergestalt winkeltrecht zerlegen, daß die Richtungen  $GC$  und  $GN$  noch innerhalb der Flächen  $AA'$  und  $BB'$  fallen. Die daraus entspringende Kraft nach horizontaler Richtung  $se = C$ , und die Kraft, welche nach  $GN$  auf  $BB'$  winkeltrecht wirkt,  $= N$ ; ferner der Winkel  $A'IB' = \alpha$ , also  $NGQ = 90^\circ - \alpha$ ,  $CGQ = 90^\circ$  und  $CGN = 180^\circ - \alpha$ . Es ist daher  $\sin CGQ = 1$ ;  $\sin NGQ = \cos \alpha$  und  $\sin CGN = \sin \alpha$ . Nach §. 19. ist aber

$C \sin CGN = Q \sin NGQ$  und  $N \sin CGN = Q \sin CGQ$   
oder

$C \sin \alpha = Q \cos \alpha$  und  $N \sin \alpha = Q$

daher findet man den Horizontaldruck gegen  $AA'$ , oder

$$(I) \quad C = Q \cot \alpha$$

und den Normaldruck auf  $BB'$ , oder

$$(II) \quad N = \frac{Q}{\sin \alpha} = Q \operatorname{cosec} \alpha.$$

Der Normaldruck  $N$  läßt sich wieder nach horizontaler Richtung  $NH$  und nach vertikaler  $NL$  zerlegen. Nach horizontaler Richtung erhält man (§. 20.)

$$N \cos \alpha = Q \cot \alpha,$$

daher ist der horizontale Druck auf die Ebene  $BB'$  eben so groß als der horizontale Druck auf die Ebene  $AA'$ .

Den von  $N$  herrührenden vertikalen Druck auf  $BB'$  findet man (§. 20.)  $= N \sin \alpha = Q$ , es ist daher der vertikale Druck auf die Ebene  $BB'$  dem Gewichte des Körpers  $AA'B'B$  gleich.

§. 218.

**Aufgabe.** Die Kraft  $V$  zu finden, welche erfordert wird, den Reil  $ABC$ , Figur 109., in die Spalte  $EHF$  zu treiben, damit der Widerstand  $R$  und die Reibung überwältigt werde. Taf. IV. Fig. 109.

**Auflösung.** Auf beiden Seiten des Reils entsteht von dem Widerstande  $R$  eine Reibung  $\mu R$ , welche bei  $E$  nach der Richtung  $EA$  dem Eindringen des Reils widersteht. Von der Kraft  $V$  entsteht auf  $E$  nach  $ME$  ein Vertikaldruck  $= \frac{1}{2} V$ . Es müssen daher am Punkte  $E$  die von den Kräften  $R$  und  $\mu R$  nach der Richtung  $EM$  entstehende Pressungen dem Druck  $\frac{1}{2} V$  gleich seyn. Nun ist der Winkel  $AEM = \alpha$ ,  $MEG = 90^\circ - \alpha$ ; zerlegt man daher die Widerstände  $R$  und  $\mu R$  nach der Richtung  $EM$  und darauf senkrecht, so sind die beiden nach  $EM$  entspringenden Seitenträfte  $R \sin \alpha$  und  $\mu R \cos \alpha$ , oder

$$\frac{1}{2} V = R \sin \alpha + \mu R \cos \alpha$$

oder man findet die Kraft

$$V = 2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) R.$$

\* §. 219.

**Zusatz.** Bleibt der Widerstand  $R$  unverändert, so wird die Kraft  $V$  zur Ueberwältigung desselben ein Größtes, wenn  $\cot \alpha = \mu$  wird. Denn man nehme  $\alpha$  als veränderlich an, und setze  $x = \sin \alpha + \mu \cos \alpha$ ,



so ist

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \cos \alpha - \mu \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\sin \alpha - \mu \cos \alpha, \text{ also eine negative GröÙe.}$$

Wenn also  $\cos \alpha - \mu \sin \alpha = 0$  gesetzt wird, so erhält man hieraus  $\mu = \cot \alpha$ , wenn  $z = V$  ein Größtes wird.

Wäre  $\mu = \frac{1}{8}$ , so ist

$$\cot \alpha = 0,1666666 = \cot 80^\circ 33' 44''.$$

Für  $\alpha = 0$  wird  $V = 2\mu R$ , und für  $\alpha = 90^\circ$  wird  $V = 2R$ , wie nach §. 7. und 187. erfordert wird.

§. 220.

Bei der Beurtheilung des Drucks, welcher entsteht, wenn Körper zwischen zwei unter beliebigen Winkeln gegen einander geneigten Ebenen befindlich sind, wird ganz auf eine ähnliche Art wie §. 203. verfahren. Ein besonderer Fall ist derjenige, wenn eine Kugel zwischen zwei Ebenen  $AB$ ,  $AB'$ , Figur 111., welche bei  $A$  fest mit einander verbunden sind, eingeklemmt wird. Ist alsdann die Neigung der Ebene  $AB$  gegen die Vertikale, oder der Winkel  $ABO = \varphi$ , und für die Ebene  $AB'$  der Winkel  $AB'O' = \varphi'$ , ferner  $Q$  das Gewicht der Kugel, und  $G$  ihr Schwerpunkt, von welchem auf  $AB$  und  $AB'$  die winkelrechten Linien  $GD$ ,  $GD'$  gezogen werden, so ist, wenn  $GQ$  vertikal ist, der Winkel  $DGQ = 90^\circ - \varphi$ , und  $D'GQ = 90^\circ - \varphi'$ . Der auf  $AB$  in  $D$  entstehende Normaldruck sey  $N$ , und auf  $AB'$  in  $D' = N'$ , so erhält man §. 19. I.

Taf. IV.  
Fig. 111.

$$N = \frac{\sin (90^\circ - \varphi')}{\sin (180^\circ - \varphi - \varphi')} Q = \frac{\cos \varphi'}{\sin (\varphi + \varphi')} Q$$

und eben so

$$N' = \frac{\cos \varphi}{\sin (\varphi + \varphi')} Q.$$

Wird die Ebene  $AB'$  vertikal, so ist  $\varphi' = 0$ ,  
also

$$N = \frac{1}{\sin \varphi} Q = Q \operatorname{cosec} \varphi \text{ und}$$

$$N' = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} Q = Q \cot \varphi.$$

Für  $\varphi = 0$  wird  $N = \infty$  und  $N' = \infty$ , oder es wird eine unendliche Kraft erfordert, die schwere Kugel zwischen zwei parallelen Ebenen im Gleichgewichte zu erhalten, vorausgesetzt, daß keine Reibung vorhanden ist.

### III. Von der Schraube.

§. 221.

Die Grundfläche  $AB$ , Figur 112., eines Cylinders  $AE$  stehe auf seiner Axe  $KC$  winkeltrecht. Man nehme auf einer Ebene,  $aa'$  so groß als den Umfang der Grundfläche  $AB$ , und zeichne über  $aa'$  ein Rechteck  $aa'd'd$ , dessen Höhe  $ad$  der Höhe  $CK = AD$  des Cylinders gleich ist. Jede der Seiten  $ad$  und  $a'd'$  des Rechtecks werde in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, wie  $af, fg \dots a'f', f'g' \dots$  getheilt, und die Linien  $af', fg' \dots$  gezogen, so kann man sich vorstellen, daß das Rechteck  $aa'd'd$  dergestalt um den Cylinder gelegt werde, daß  $a$  auf  $A$ , die Linie  $aa'$  genau in den Umfang der Grundfläche  $AB$ , und die

Taf. IV.  
Fig. 112.

ganze Fläche des Rechtecks genau auf die krumme Oberfläche des Cylinders passe. Alsdann werden die Punkte  $a$  und  $a'$  auf  $A$ ;  $f$  und  $f'$  auf  $F$ ....,  $d$  und  $d'$  auf  $D$  fallen. Die Linien  $af'$ ,  $fg'$ ,  $gh'$ ,  $hd'$  bilden alsdann auf der Oberfläche des Cylinders eine zusammenhängende krumme Linie, welche man eine Schraubenlinie nennt.

Weil alle Linien wie  $af'$ ,  $fg'$  ..., welche die Schraubenlinie bildeten, gleiche Neigung gegen die Grundlinie  $aa'$  haben, so müssen auch alle kleine Theile oder Elemente der Schraubenlinie verlängert, die erweiterte Grundfläche  $AB$  des Cylinders durchgängig unter gleichem Winkel schneiden, oder die Tangenten der Schraubenlinie schneiden die verlängerte Grundfläche  $AB$  unter einerlei Winkel. Dieser Winkel, welcher die Neigung der Schraubenlinie heißen kann, wird durch den Winkel  $a'a'f'$  dargestellt, und wenn man denselben  $= \alpha$  setzt, so müssen sich zwei Tangenten, welche durch den Punkt  $A$  gehn, und wovon die eine den Umfang der Grundfläche  $AB$ , die andere aber die Schraubenlinie berührt, unter dem Winkel schneiden.

Ein jeder Theil der Schraubenlinie wie  $AF = af'$  heißt ein Schraubengang (*Helix. Filet à la vis*), und die Entfernung der Schraubengänge voneinander, parallel mit der Axe gemessen, wie  $AF$  die Höhe eines Schraubenganges (*Pas de vis*).

Anstatt der Schraubenlinie kann man auf der Oberfläche des Cylinders eine Hervorragung so legen, daß alle Durchschnitte derselben, welche die

Die  $KC$  gehen, gleich groß sind, alsdann heißt der Cylinder eine Schraubenspindel (*Cochlea mas*), und seine Hervorragungen das Schraubengewinde. Man hat dreieckigte und viereckigte Schraubengewinde, wie Figur 113. und 114., bei welchen  $ab$  die Höhe des Schraubenganges,  $ad$  der äußere und  $ce$  der innere Halbmesser der Spindel ist. Wenn lediglich vom Halbmesser der Spindel die Rede ist, so wird allemal der mittlere Halbmesser oder das arithmetische Mittel zwischen  $ad$  und  $ce$  darunter verstanden.

Taf. V.  
Fig. 113.  
u. 114.

Ein cylindrisch ausgehöhlter Körper, in dessen Höhlung Vertiefungen eingeschnitten sind, in welche die Gewinde der Spindel genau passen, heißt eine Schraubenmutter (*Cochlea femina. Écrou*). Spindel und Mutter geben eine Schraube (*Cochlea. Vis*), bei deren Gebrauch entweder die Mutter festgehalten und die Spindel umgedreht, oder die Spindel festgehalten und die Mutter umgedreht wird, so daß in beiden Fällen bei jeder Umdrehung entweder die Spindel oder Mutter um die Höhe eines Schraubenganges weiterrückt. Auch kann man Spindel und Mutter zusammen umdrehen.

## §. 222.

Die Höhe eines Schraubenganges, Figur 112.,  $vo = a'f$  sey  $h$ , und der Halbmesser der Spindel  $Af = r$ , so ist der Umfang der Spindel  $= 2\pi r = aa'$ ,

Taf. IV.  
Fig. 112.

so daß  $a'af = \text{tgt } \alpha = \frac{a'f}{aa'}$ , daher findet man

$$\text{tgt } \alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

U

ie über Band.

oder man erhält die Tangente des Winkels, welcher der Neigung des Schraubengewindes entspricht, wenn die Höhe des Schraubenganges durch den Umfang der Spindel dividirt wird.

Zaf. V.  
Fig. 113.  
114. 3

Der vorstehende Ausdruck gilt unbedingt von der Schraubenlinie, welche auf der Oberfläche eines Cylinders beschrieben werden kann. Wenn aber über der Schraubenlinie ein Gewinde von einer bestimmten Gestalt angebracht wird, so liegen zwar alle Punkte der Oberfläche dieses Gewindes, welche von der Spindelaxe gleich weit entfernt sind, in einerlei Schraubenlinie, und jede dieser Linien, welche vom äußersten Punkte b, Figur 113. und 114., bis zum innersten c auf dem Gewinde beschrieben werden kann, hat zwar mit den übrigen gleiche Höhe des Schraubenganges, aber nicht gleichen Neigungswinkel  $\alpha$ , weil dieser Winkel für jede auf dem Umfange des Gewindes angebrachte Schraubenlinie desto kleiner wird, je größer der zugehörige Halbmesser  $r$ , oder je weiter die Schraubenlinie von der Spindelaxe entfernt ist. Gesezt, der Halbmesser für diejenige Schraubenlinie, welche durch den einen der innersten Punkte c des Gewindes geht, sey  $ec = r'$ , so ist

$$\operatorname{tgt} \alpha' = \frac{h}{2\pi r'}.$$

Für eine Schraubenlinie, welche durch einen der äußersten Punkte b des Gewindes geht, sey  $ao = r''$ , so ist

$$\operatorname{tgt} \alpha'' = \frac{h}{2\pi r''}.$$

Wes  $r'' > r'$ , also  $\alpha'' < \alpha'$ . Nimmt man daher als mittleren Halbmesser der Spindel  $r = \frac{r' + r''}{2}$ , welcher in der Folge kurz der Halbmesser der Spindel heißen soll, und es ist  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$ , so erhält man für  $\alpha$  einen Mittelwerth, größer als  $\alpha''$  und kleiner als  $\alpha'$ , welchen man mit hinlänglicher Genauigkeit in der Rechnung beibehalten kann.

## §. 223.

**Aufgabe.** In der unbeweglichen und hinlänglich befestigten Mutter DEFG, Figur 115., befindet sich eine vertikale Spindel CK, auf welcher eine Last Q ruhet; man soll die Größe der am Umfange der Spindel anzubringenden Kraft P finden, damit zwischen Kraft und Last ein Gleichgewicht entsteht.

Zaf. V.  
Fig. 115.

**Auflösung.** Vorausgesetzt, daß das Gewicht der Spindel mit zur Last Q gerechnet sey, so ist der gesammte Druck vom Gewinde der Spindel auf das Gewinde der Mutter = Q. Die gesammte Fläche der Mutter, welche von der Spindel gedrückt wird, werde in eine sehr große Menge gleicher Flächen eingetheilt, von welchen die Verlängerung zweier Seiten jedesmal die Axe schneidet, so ist für den mittlern Halbmesser der Spindel der Neigungswinkel, nach welchem die Last auf einer jeden dieser kleinen Flächen abgleitet, =  $\alpha$ , also  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$ , wo h die Höhe des Schraubenganges, und r den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Ist nun die Anzahl dieser kleinen Flächen

$= n$ , so ist der Druck auf jede solche kleine Fläche  $= \frac{1}{n} Q$ . Diese Last kann man sich in der Mitte der kleinen Fläche vereinigt denken, und weil solche nur wie auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigten Ebene ausweichen kann, so sey die für das Gleichgewicht mit  $\frac{1}{n} Q$  erforderliche Horizontalkraft  $= \frac{1}{n} P$ , alsdann ist §. 194.

$$\frac{1}{n} P = \frac{1}{n} Q \operatorname{tg} \alpha \text{ oder}$$

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} Q.$$

Da nun die Kraft  $P$  an jedem Punkte des Umfangs der Spindel angebracht werden kann (§. 64.), wenn nur ihre Richtung winkelrecht auf den Halbmesser  $AC$  ist, und in eine Ebene fällt, welche auf der Axe  $KC$  winkelrecht steht, so folgt aus der letzten Gleichung

$$P : Q = h : 2\pi r$$

oder für das Gleichgewicht verhält sich die Kraft am Umfange der Schraubenspindel zur Last, welche die Spindel nach der Richtung ihrer Axe preßt, wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange der Spindel.

Wäre die Spindel befestigt, dagegen aber die Mutter belastet und frei, so läßt sich dieser Satz eben so erweisen.

#### §. 224.

**Zusatz.** Soll eine Kraft  $P'$  am Hebelsarme  $CA' = r'$  mit der Last  $Q$  im Gleichgewichte seyn;

Herausgesetzt daß die Richtung  $A'P'$  auf  $A'C$  winkelrecht steht, und in einer auf der Axe der Spindel winkelrechten Ebene liegt, so muß, wenn  $P'$  eben die Wirkung als  $P$  hervorbringen soll,  $r'P' = rP$  seyn (§. 64.).

Dies giebt  $P = \frac{r'P'}{r}$ , also  $\frac{r'P'}{r} = \frac{h}{2\pi r} Q$ , folglich die Kraft

$$P' = \frac{h}{2\pi r'} Q$$

oder für das Gleichgewicht verhält sich die Kraft  $P'$  zur Last  $Q$  wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange des Kreises, welcher die Länge des Hebelarms, woran die Kraft wirkt, zum Halbmesser hat.

## §. 225.

Weil die Höhe des Schraubenganges gegen die Länge des Hebelarms, woran die Kraft wirkt, nur klein ist, so folgt hieraus, daß man sich der Schrauben mit vielem Vortheile bedienen kann, wenn es darauf ankommt, eine große Last mit einer geringen Kraft fortzubewegen. Die Reibung erfordert zwar einen ansehnlichen Ueberschuß an Kraft, wenn solche überwältigt werden soll, sie verhindert aber auch, daß die Schraube, wenn ein Gegendruck entsteht, nicht leicht zurückgehen kann. Anwendungen der Schraube, bei welchen die Mutter unbeweglich bleibt, und nur die Spindel umgedreht wird, findet man bei den Hauspressen zur Wäsche, bei den Druckpressen, Münzpressen, Keltern &c. Dagegen bei den großen Buchbinder- und Zeugpressen, beim Zusammenschrauben mittelst Bolzen &c. bleibt die



Spindel unbeweglich, und die Mutter wird umgedreht. Noch giebt es einen dritten Fall, bei welchem die Spindel zwar umgedreht wird; aber nicht fortrückt, dagegen rückt die Mutter weiter, ohne umgedreht zu werden, wie beim Erhöhen der Schiffe auf dem Bauplatze, beim Aufschrauben gesenkter Gebäude &c. Als ein besonderer Fall kann auch noch die Schraube ohne Ende (*Cochlea infinita*, *Vis sans fin*) hierher gerechnet werden, wo eine um ihre Ase bewegliche Spindel ohne Fortrücken umgedreht wird. Anstatt der Mutter greifen aber die Zähne eines Rades zwischen die Schraubengewinde, und diese Zähne werden alsdann eben so wie die Mutter durch die Umdrehung der Spindel fortgeschoben, so daß auch hier in Bezug auf Kraft und Widerstand, die vorher erwiesenen Bedingungen für das Gleichgewicht gelten. Die Schraube ohne Ende gehört übrigens zu den zusammengesetzten Maschinen, und daher in die Maschinenlehre.

#### §. 226.

**Aufgabe.** Die Kraft zu finden, welche bei der Schraube sowohl zum Erheben als auch zum Erhalten der Last mit Rücksicht auf Reibung erforderlich ist.

**Auflösung.** Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung sey  $V$  die Kraft, welche der Last  $Q$ , die nach der Richtung der Spindelaxe wirkt, und der Reibung das Gleichgewicht hält, oder wo beim geringsten Ueberschuß an Kraft eine Bewegung der Last erfolgen muß, so kann man sich wie §. 223. vorstellen, daß die Last  $Q$  auf derjenigen Schraubenlinie vertheilt sey,

welche durch den mittlern Spindelhalbmesser geht, so daß die Last unter einem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont abzugleiten strebt. Dieser wirkt die Kraft  $V$  horizontal entgegen, daher ist nach §. 198. die zum Erheben nöthige Kraft

$$V = \frac{Q (1 + \mu \cot \alpha)}{\cot \alpha - \mu}$$

und eben so findet man, wenn  $V'$  die zum Erhalten der Last nöthige Kraft bezeichnet, nach §. 201.

$$V' = \frac{Q (1 - \mu \cot \alpha)}{\cot \alpha + \mu}$$

Es ist aber §. 223.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$ , also  $\cot \alpha = \frac{2\pi r}{h}$ . Diesen Werth in die obigen Gleichungen gesetzt, giebt die zum Erheben nöthige Kraft

$$(I) \quad V = \frac{h + 2\pi\mu r}{2\pi r - \mu h} Q$$

und für die zum Erhalten nöthige Kraft ist

$$(II) \quad V' = \frac{h - 2\pi\mu r}{2\pi r + \mu h} Q$$

Der letztere Ausdruck dient dazu, um zu beurtheilen, wie viel Kraft  $V'$  angewandt werden muß, damit die Schraube durch die Last  $Q$  nicht zurückgedreht werden kann.

Wollte man wissen, unter welchen Umständen eine Schraube von der Last nicht zurückgedreht werden kann, ohne daß zum Festhalten der Schraube eine andere Kraft als die Reibung angewandt werde, so muß  $V' = 0$ , also  $h - 2\pi\mu r = 0$  seyn. Hieraus erhält man die Bedingung

$$\frac{h}{2\pi r} = \mu$$

d. h. wenn das Gewinde einer Schraube so angewendet ist, daß die Höhe des Schraubenganges, durch den Umfang der Spindel dividirt, dem Reibungskoeffizienten gleich ist, so kann die Schraube in keinem Falle durch die Last zurückgedreht werden.

$$\text{Es sey } \mu = \frac{1}{6}, \text{ so ist } 2\pi\mu = 1,047 = \frac{h}{r}.$$

Wenn also die Reibung dem sechsten Theile des Drucks gleich ist, so wird eine Schraube von der Last noch nicht zurückgedreht werden können, wenn auch die Höhe ihrer Schraubengänge noch etwas größer, als der Halbmesser der Schraubenspindel ist.

## Neuntes Kapitel.

### Vom Rade an der Welle.

#### §. 227.

Taf. V.  
Fig. 116.

Un einem Cylinder AB, Figur 116., welcher hier eine Welle (Axis) genannt wird, ist eine freisförmige Scheibe DE, ein Rad (Peritrochium. Roue) so befestigt, daß die Fläche des Rades winkeltrecht auf der Axe der Welle steht, und eins ohne das andere nicht umgedreht werden kann. An den Enden der Welle bei F und G sind Zapfen (Tourillons) in der verlängerten Wellaxe angebracht, welche auf Pfannen (Sous-bandes) fest liegen, und sich in denselben leicht

umdrehen können. Diese Einrichtung heißt ein Rad an der Welle (*Axis in peritrochio. Axe dans une roue*), wo gewöhnlich am Umfange des Rades nach der Richtung der Tangente eine Kraft wirkt, die einer Last am Umfange der Welle, oder auch an einem zweiten Rade das Gleichgewicht halten soll.

Liegt die Welle wagerecht, so heißt das Rad an der Welle ein Haspel (*Sucula, Treuil, Tour*), und wenn die Welle vertikal steht, eine Winde oder ein Göpel (*Ergata. Cabestan*).

Weil die Kraft am Umfange des Rades auf verschiedene Weise angebracht seyn kann, so unterscheidet man noch bei den Haspeln:

das Seilrad, wenn die Kraft an einem Seile wirkt, welches sich an dem Umfange des Rades befindet;

den Kreuzhaspel (*Sucula*), wenn statt des Rades mittelst kreuzweis durchgesteckter Arme (*Scytalae. Barres*) die Welle umgedreht wird;

das Spillrad (*roue de carrière*), wo am Umfange des Rades Sprossen, parallel mit der Wellaxe, angebracht sind;

das Hornrad, wo diese Sprossen in der verlängerten Richtung der Halbmesser des Rades angebracht werden;

den Hornhaspel, bei welchem statt des Rades am Ende der Welle, wo sich die Zapfen befinden, Handgriffe oder Kurbeln (Haspelhörner) (*Manubria. Manivelles*) angebracht sind;

Das Laufrad, welches aus einem hohlen Rade oder einer Trommel (*Tambour*) besteht, innerhalb dessen Umfang Menschen oder Thiere durch ihr Gewicht eine Umdrehung bewirken.

Bei den Winden oder Göpeln unterscheidet man die Erdwinde, welche von Menschen mittelst Stangen oder Arme, die durch die Welle gesteckt sind, umgedreht werden, von den Pferdegöpeln, bei welchen lange Arme oder Zugbäume an der Welle befestigt sind, die man aber durch Pferde in Bewegung setzt.

Hat die Welle eine schiefe Stellung, und besteht das Rad aus einer Scheibe, auf welcher sich Menschen oder Thiere bewegen, um dadurch eine Umdrehung zu bewirken, so heißt diese Einrichtung eine Tretscheibe.

### §. 228.

Wirken Kraft und Last nach Richtungen, welche auf den Halbmessern des Rades und der Welle winkelrecht sind, so ist es einerlei, ob die Welle stehend oder liegend angenommen wird. Nur in Absicht der Reibung an den Zapfen entsteht ein Unterschied in Absicht der Kraft für das Gleichgewicht. Wird die Reibung noch bei Seite gesetzt, und man nennt den Halbmesser des Rades  $CD = a$ , Figur 116., den Halbmesser der Welle  $IK = r$ , die Kraft in  $D = P$ , die Last am Umfange der Welle  $= Q$ , so ist §. 64.  $aP = rQ$ , oder die Kraft

$$P = \frac{rQ}{a} \text{ oder auch}$$

Taf. V.  
Fig. 116.

$$P : Q = r : a$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last umgekehrt wie der Halbmesser des Rades zum Halbmesser der Welle.

§. 229.

Bei dem Laufrade, wo sich ein Mensch oder Thier am Umfange innerhalb des Rades befindet, und nur durch sein Gewicht vertikal abwärts wirkt, kann nur ein Theil dieses Gewichts auf die Umdrehung des Rades verwandt werden. Es sey Figur 117.  $AC = a$  Taf. V. der Halbmesser des Rades, an welchem in A ein Ge- Fig. 117. wicht  $P$  vertikal abwärts wirkt;  $BC = r$  der Halbmesser der Welle, an deren Umfange die Last  $Q$  hängt, und der Winkel, welchen  $AC$  mit dem vertikalen Halbmesser  $CD$  einschließt, oder  $ACD = \alpha$ . Zerlegt man nun die Kraft  $P$  nach  $AE$  in der verlängerten Richtung des Halbmessers  $CA$ , und nach  $AT$  in der Richtung der Tangente, weil der Punkt  $A$  nur nach dieser Richtung ausweichen kann, so ist die Kraft nach

$$AE = P \cos \alpha$$

welche keine Bewegung des Rades hervorbringen kann. Ferner ist die Kraft nach

$$AT = P \sin \alpha$$

und diese allein hält der Last das Gleichgewicht. Es ist daher wie §. 228.

$a \cdot P \sin \alpha = rQ$ , und hieraus die Kraft

$$P = \frac{rQ}{a \sin \alpha}$$

Hieraus folgt, daß die erforderliche Kraft desto

kleiner ist, je größer der Winkel  $\alpha$  wird, oder je höher der Punkt A gegen D liegt. Sie erhält ihren kleinsten Werth in F am wagerechten Halbmesser, und ihren größten in D am vertikalen Halbmesser, wo sie unendlich groß seyn müßte, um der Last das Gleichgewicht zu halten.

Gewöhnlich ist für Menschen beim Laufrade der Winkel  $\alpha = 20$  bis höchstens 30 Grad. Bei einem größern Winkel würde man zwar ein größeres Moment erhalten, allein die Stellung des Menschen wird so steil und das Aufsteigen so beschwerlich, daß man alsdann nicht auf eine Dauer der Bewegung von einer bis zwei Stunden rechnen kann. Für  $\alpha = 30$  Grad ist  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , daher in diesem Falle die Kraft

$$P = \frac{2r}{a} Q.$$

§. 230.

**Aufgabe.** An einem Haspel die Kraft zu finden, welche mit der Last und der Reibung an den Zapfen in den Pfannen das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** Die Kraft V, Figur 118., wirkt am Halbmesser AC = a des Rades, und die Last Q am Halbmesser BC = r der Welle. Das Gewicht des Haspels sey = M, welches im Mittelpunkte C des Zapfens, dessen Halbmesser CD =  $\rho$  ist, vertikal abwärts nach CM wirkt. Der Haspel hat zwar an beiden Enden der Welle Zapfen, die auf Pfannen ruhen, welche die Zapfen umgeben, und man müßte daher die Reibung eines jeden Zapfens besonders unter-

Taf. V.

Fig. 118.

V  
a  
r  
M  
C

suchen. Weil aber hier, beide Zapfen gleich groß und von einerlei Materie angenommen werden, und weil die drückenden Kräfte eben so stark beide Zapfen pressen, als wenn solche vereint nur auf einen Zapfen wirkten, so wird man hier wegen der kürzern Darstellung die letztere Voraussetzung beibehalten.

Weil von der ganzen Zurüstung, an welcher die Kräfte und Widerstände wirken, nur die Zapfen an ihrem Umfange durch die Pfannen unterstützt sind, so muß die mittlere Kraft, welche aus sämtlichen Kräften entspringt, durch irgend einen Punkt im Umfange des Zapfens gehen, weil sonst kein Gleichgewicht möglich ist.

Ist  $G$  dieser Punkt, so müssen sich sämtliche Kräfte, wenn derselbe unterstützt wird, einander im Gleichgewicht erhalten; auch entsteht auf den Punkt  $G$  ein eben so großer Druck, als wenn die Kräfte  $V$ ,  $Q$ ,  $M$  an  $G$  nach ihren parallelen Richtungen in  $v$ ,  $q$ ,  $m$  angebracht wären (§. 58.). Man ziehe durch  $CG$  die Linie  $CR$ , und darauf winkeltrecht in  $G$  die Linie  $HI$ , so lassen sich die in  $G$  wirkenden Pressungen nach den Richtungen  $GR$  und  $HI$  zerlegen, wovon der Druck nach  $GR$  keine Bewegung, aber Reibung in der Pfanne verursacht. Der Druck nach  $GI$  fällt in die Tangente der Pfanne, verursacht also keine Reibung, und muß Bewegung erzeugen, wenn solche nicht von der Reibung am Umfange des Zapfens aufgehoben wird, weshalb zur Erhaltung des Gleichge-



wichts der nach GI entstehende Druck der Reibung gleich seyn muß.

Kaf. V.

Fig. 118.

a

β

Um die Richtung der Kräfte anzugeben, sey OZ eine wagerechte Linie, welche von der verlängerten Richtung der Kraft V unter dem Winkel  $OE V = \alpha$ , und von Q unter dem Winkel  $OF Q = \beta$  geschnitten wird. Auch sey der Winkel  $GHC = \varphi$ , daher auch

$GCD = R G m = \varphi$ , und man erhält die Winkel  $H G v = \alpha + \varphi$ ;  $H G m = 90^\circ + \varphi$ ;  $H G q = \beta + \varphi$ ; also  $\sin(90^\circ + \varphi) = \cos \varphi$  und  $\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$ .

Durch Zerlegung der auf den Punkt G wirkenden Kräfte V, M, Q entspringe nach der Richtung GR eine Kraft R, und nach GI eine Kraft R', so erhält man §. 24.

$$R = V \sin(\alpha + \varphi) + M \cos \varphi + Q \sin(\beta + \varphi) \text{ und}$$

$$R' = V \cos(\alpha + \varphi) - M \sin \varphi + Q \cos(\beta + \varphi).$$

Die von der Kraft R entstehende Reibung sey  $= \mu R$ , so widersteht solche der Umdrehung des Zapfens nach der Richtung GH, und ist der Kraft R' grade entgegengesetzt, daher für das Gleichgewicht  $R' = \mu R$ , oder

$$V \cos(\alpha + \varphi) + Q \cos(\beta + \varphi) - M \sin \varphi = \mu R,$$

aber auch

$$[V \sin(\alpha + \varphi) + Q \sin(\beta + \varphi) + M \cos \varphi]^2 = R^2 \text{ und}$$

$$[V \cos(\alpha + \varphi) + Q \cos(\beta + \varphi) - M \sin \varphi]^2 = \mu^2 R^2.$$

Die Parenthesen aufgelöst, beide Gleichungen addirt, und die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen, so erhält man weil

$$\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$$

$$\sin(\alpha + \Phi) \sin(\beta + \Phi) + \cos(\alpha + \Phi) \cos(\beta + \Phi) = \cos(\beta - \alpha)$$

$$\sin(\alpha + \Phi) \cos \Phi - \cos(\alpha + \Phi) \sin \Phi = \sin \alpha \text{ u. s. w. ist,}$$

$$V^2 + Q^2 + M^2 + 2 V Q \cos(\beta - \alpha) + 2 V M \sin \alpha + 2 Q M \sin \beta = (1 + \mu^2) R^2.$$

Weil die Umdrehung um den Punkt C erfolgt, so müssen die entgegengesetzten Momente in Bezug auf diesen Punkt einander gleich seyn, §. 53., also

$$a V = r Q + \mu \rho R, \text{ daher } R^2 = \frac{(a V - r Q)^2}{\mu^2 \rho^2}.$$

Diesen Werth statt  $R^2$  in die obige Gleichung eingeführt, solche nach  $V$  geordnet, und

$$\frac{\mu^2 \rho^2}{1 + \mu^2} = f^2$$

gesetzt, giebt

$$V^2 - 2 V \frac{a r Q + f^2 [Q \cos(\beta - \alpha) + M \sin \alpha]}{a^2 - f^2} + \frac{r^2 Q^2 - f^2 (Q^2 + M^2 + 2 M Q \sin \beta)}{a^2 - f^2} = 0$$

und wenn

$$A = a r Q + f^2 [Q \cos(\beta - \alpha) + M \sin \alpha] \text{ und}$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 + 2 Q M \sin \beta]$$

gesetzt wird, so findet man die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft

$$V = \frac{A + \sqrt{[A^2 - (a^2 - f^2) B]}}{a^2 - f^2}.$$

**Beispiel.** Der Halbmesser des Rades sey 10 Fuß, der Welle 1 Fuß, und des Zapfens 1 Zoll. An der Welle sey eine Last von 1000 Pfund angebracht, und die ganze Zurüstung, welche auf den Pfannen ruht, wiege 2000 Pfund. Die Richtung der Kraft schneide den Horizont unter einem Winkel von 50, und die der Last unter einem Winkel von 120 Grad. Ist ferner  $\mu = \frac{1}{4}$ , so erhält man

$$a = 10; r = 1; \rho = \frac{1}{12} \text{ Fuß.}$$

$$Q = 1000; M = 2000 \text{ Pfund}$$

$$\alpha = 50; \beta = 120 \text{ Grad, also}$$

$$f^2 = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}}{1 + \frac{1}{12}} = 0,000267$$

$$A = 10 \cdot 1000 + 0,000267 [1000 \cdot \cos 70^\circ + 2000 \cdot \sin 50^\circ] = 10000,5004$$

$$B = 1000000 - 0,000267 [5000000 + 4000000 \sin 120^\circ] = 997740,085$$

und hieraus die erforderliche Kraft

$$V = \frac{10000,5004 + \sqrt{236299,0724}}{99,9997} = 104,867 \text{ Pfund.}$$

Zaf. V.  
Fig. 118.

Anmerkung. In den Lehrbüchern von Karsten, Mönnich &c. wird vorausgesetzt, daß der Punkt G, Figur 118., vertikal unter C in D falle. Dies erleichtert zwar die Untersuchung, und die entstehenden Resultate sind nur wenig abweichend von den hier gefundenen; (m. s. §. 238.) allein da diese Vorstellung nicht ganz wahr ist, so hat man hier die richtigere gewählt. Man sehe hierüber

*Euleri, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.*

Rostochii 1765. Supplementum, Caput III. p. 464. etc.

Neuere Untersuchungen über alle beim Gleichgewichte mit Rücksicht auf Zapfenreibung vorkommenden Bestimmungsstücke, von Dr. G. S. Ohm, findet man in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin 1829. V. Band, 1. Heft, Seite 51 u. f.

### §. 231.

1. Zusatz. Weil  $\rho$  gegen  $a$  sehr klein ist, und  $f$  ebenfalls sehr klein ausfällt, wie man sich aus den berechneten Werthen §. 238. leicht überzeugt, so kann man  $f^2$  gegen  $a^2$  als unbedeutend weglassen, und  $a^2$  statt  $a^2 - f^2$  setzen. Dies giebt die Kraft

$$V = \frac{A + \sqrt{A^2 - a^2 B}}{a^2}.$$

Beispiel. Mit Beibehaltung der Abmessungen in dem Beispiele des vorigen §. ist hier die Kraft

$$V = \frac{10000,5004 + \sqrt{235999,75}}{100} = 104,863 \text{ Pfund,}$$

welches von 104,867 Pfund nur wenig verschieden ist.

§. 232.

2. Zusatz. Wird das Gewicht des Zaspels bei Seite gesetzt, so ist  $M = 0$ , und man erhält

$$A = [ar + f^2 \cos(\beta - \alpha)] Q \text{ und}$$

$$B = (r^2 - f^2) Q^2$$

daher erhält man, wenn §. 230.  $f^2 = 0$  gesetzt wird, welches ohne Bedenken geschehen kann, nach gehöriger Abkürzung die Kraft

$$(I) \quad V = \frac{ar + f^2 \cos(\beta - \alpha) + f\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos(\beta - \alpha)}}{a^2 - f^2} \cdot Q$$

wo  $\beta - \alpha$  den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der Kräfte  $V$ ,  $Q$  nach oben verlängert einschließen, und  $f^2 = \frac{\mu^2 v^2}{1 + \mu^2}$  ist. Weil aber dieser Ausdruck jederzeit nur sehr klein ausfällt, und  $\cos(\beta - \alpha)$  nie größer als  $\pm 1$  wird, so kann man auch das Glied  $f^2 \cos(\beta - \alpha)$  ohne Nachtheil weglassen, und erhält alsdann

$$(II) \quad V = \frac{ar + f\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos(\beta - \alpha)}}{a^2} \cdot Q.$$

Bleiben alle Größen bis auf den Winkel  $\alpha$ , unter welchem die Kraft  $V$  den Horizont schneidet, unverändert, so erhält  $V$  seinen kleinsten Werth, wenn  $\cos(\beta - \alpha)$  seinen größten negativen Werth erhält. Dieser ist  $-1$ , wenn  $\beta - \alpha$  oder  $\alpha - \beta = 180^\circ$ , oder wenn  $\alpha = \beta - 180^\circ$  oder  $\alpha = \beta + 180^\circ$

ist. Soll daher die kleinste Kraft zur Umdrehung des Haspels angewandt werden, so muß die Differenz der beiden Winkel, unter welchen die Richtungen der Kräfte  $V, Q$  den Horizont schneiden, 180 Grade betragen, oder beide Richtungen müssen nach entgegengesetzten Seiten liegen und parallel seyn.

Wäre z. B.  $\beta = 60^\circ$ , so müßte  $\alpha = 240^\circ$  seyn. Für  $\beta = 220^\circ$  wäre  $\alpha = 40^\circ$ .

Eben so können die Umstände angegeben werden, unter welchen die Kraft  $V$  am nachtheiligsten wirkt, oder ihren größten Werth erhält. Dies geschieht, wenn  $\cos(\beta - \alpha)$  am größten, oder  $= +1$  ist. Dieser Fall tritt ein, wenn  $\beta - \alpha = 0$  wird. Die erforderliche Kraft erhält daher ihre nachtheiligste Richtung, oder wird am größten, wenn ihre Richtung mit dem Horizonte einen eben so großen Winkel als die Last einschließt, oder wenn beide Richtungen nach einerlei Seite liegen und parallel sind.

1. Beispiel. Für  $a = 10$ ,  $r = 1$ ,  $p = \frac{1}{18}$  Fuß und für  $Q = 1000$  Pfund findet man, wenn  $\alpha = 60^\circ$  und  $\beta = 240^\circ$  ist, für  $\mu = \frac{1}{2}$

$$f^2 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}}{1 + \frac{1}{18}} = 0,0003846 \text{ und } f = 0,0196$$

$\cos(\beta - \alpha) = \cos 180^\circ = -1$ , daher die Kraft

$$V = \frac{10 + 0,0196 \sqrt{81}}{100} \cdot 1000 = 101,764 \text{ Pfund.}$$

2. Beispiel. Für  $\alpha = \beta = 70^\circ$  erhält man mit Beibehaltung der übrigen vorstehenden Werthe

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos 0^\circ = 1, \text{ also}$$

$$V = \frac{10 + 0,0196 \sqrt{121}}{100} \cdot 1000 = 102,156 \text{ Pfund.}$$

§. 233.

3. Zusatz. Die Richtung der Last  $Q$  bilde mit dem Horizont einen Winkel  $\beta = 90^\circ$  oder sey vertikal unterwärts gerichtet, so ist  $\cos(\beta - \alpha) = \sin \alpha$  und  $\sin \beta = 1$ , also §. 230.

$$A = arQ + f^2 (M + Q) \sin \alpha$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 (M + Q)^2$$

daher wenn wieder, wie solches in der Folge immer geschehen wird  $f^2 = 0$  gesetzt wird, so erhält man die Kraft

$$(I) \quad V = \frac{arQ + f^2 (M + Q) \sin \alpha + f \sqrt{[a^2 (M + Q)^2 + r^2 Q^2 + 2arQ(M + Q) \sin \alpha]}}{a^2 - f^2}$$

Wirkt die Kraft vertikal aufwärts, so ist  $\alpha = 270^\circ$  also  $\sin \alpha = -1$  und man erhält

$$(II) \quad V = \frac{rQ + f(M + Q)}{a + f}$$

Wirkt die Kraft  $V$  vertikal unterwärts, so ist  $\alpha = 90^\circ$ , also  $\sin \alpha = 1$ , daher

$$(III) \quad V = \frac{rQ + f(M + Q)}{a - f}$$

Fällt die Richtung der Kraft horizontal, so ist  $\alpha = 0$  oder  $= 180^\circ$ , also  $\sin \alpha = 0$ , folglich die Kraft

$$(IV) \quad V = \frac{arQ + f \sqrt{[a^2 (M + Q)^2 + r^2 Q^2]}}{a^2 - f^2}$$

wo man im Nenner  $f^2 = 0$  setzen kann.

Beispiel. Für  $\alpha = 30^\circ$ ;  $a = 10$ ,  $r = 1$ ,  $\rho = \frac{1}{18}$  Fuß, für  $Q = 1000$  und  $M = 2000$  Pfund findet man, wenn  $\mu = \frac{1}{7}$  gesetzt wird

$$f^2 = 0,0003846 \text{ und } f = 0,0196, \text{ daher}$$

$$\text{nach (I)} \quad V = \frac{10000,5769 + 0,0196\sqrt{931000000}}{100} = 105,986 \text{ Pfund,}$$

$$\text{nach (II)} \quad V = \frac{1058,8}{10,0196} = 105,673 \text{ Pfund,}$$

$$\text{nach (III)} \quad V = \frac{1058,8}{9,9804} = 106,088 \text{ Pfund,}$$

$$\text{nach (IV)} \quad V = \frac{10588,91}{100} = 105,889 \text{ Pfund.}$$

Will man den vorstehenden Ausdrücken (II) und (III) eine zur Berechnung noch bequemere Gestalt geben, bei welcher zugleich der Antheil, welcher auf die Reibung kommt, abgesondert ist, so kann man folgendergestalt verfahren. Man dividire mit dem Nenner  $a + f$  in den Zähler  $rQ + f(M + Q)$ , so erhält man zum Quotienten  $\frac{rQ}{a}$  und der Rest ist

$$- \frac{rfQ}{a} + f(M + Q) = f\left(\frac{a-r}{a}Q + M\right).$$

Wird nun von diesem Reste nur allein der Factor  $f$  durch  $a + f$  dividirt, so erhält man

$$\frac{f}{a+f} = \frac{f}{a} - \frac{f^2}{a^2} + \frac{f^3}{a^3} - \frac{f^4}{a^4} + \dots \text{ folglich:}$$

$$\frac{rQ + f(M+Q)}{a+f} = \frac{rQ}{a} + \left(\frac{a-r}{a}Q + M\right) \left(\frac{f}{a} - \frac{f^2}{a^2} + \dots\right).$$

Da nun  $f$  gegen  $a$  sehr klein ist, so können  $\frac{f^2}{a^2}$ ;  $\frac{f^3}{a^3}$ ; .... als unbedeutend weggelassen werden, und man erhält, wenn die Kraft  $V$  vertikal aufwärts wirkt,

$$\text{[II]} \quad V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a} \left(\frac{a-r}{a}Q + M\right).$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man, wenn die Kraft  $V$  vertikal unterwärts wirkt,

$$\text{[III]} \quad V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a} \left(\frac{a+r}{a}Q + M\right).$$

Diese Darstellung ist vom Hrn. Professor Gerstner angegeben, man sehe dessen Abhandlung:

Vergleichung der Kraft und Last beim Räderwerk mit Rücksicht auf die Reibung; in den neuen Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Band. Wien und Prag, 1791. S. 257 u. f.

§. 234.

4. Zusatz. Die Last  $Q$  sey vertikal aufwärts gerichtet, so ist  $\beta = 270^\circ$ , also  $\cos(\beta - \alpha) = -\sin \alpha$  und  $\sin \beta = -1$ , daher §. 230.

$$A = arQ + f^2 (M - Q) \sin \alpha$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 (M - Q)^2,$$

und man findet die Kraft

$$(I) \quad V = \frac{arQ + f^2 (M - Q) \sin \alpha + f \sqrt{[a^2 (M - Q)^2 + 2arQ(M - Q) \sin \alpha + r^2 Q^2]}}{a^2 - f^2}.$$

Wirkt die Kraft vertikal aufwärts, so ist  $\alpha = 270^\circ$ , also  $\sin \alpha = -1$ , daher

$$(II) \quad V = \frac{rQ + f(M - Q)}{a + f}.$$

Wirkt die Kraft vertikal unterwärts, so ist  $\alpha = 90^\circ$ , also  $\sin \alpha = 1$ , daher

$$(III) \quad V = \frac{rQ + f(M - Q)}{a - f}.$$

Wenn endlich die Richtung der Kraft horizontal ist, also  $\sin \alpha = 0$  wird, so erhält man

$$(IV) \quad V = \frac{arQ + f \sqrt{[a^2 (M - Q)^2 + r^2 Q^2]}}{a^2 - f^2}.$$

Beim Gebrauche der Ausdrücke (I) und (IV) kann  $f^2$  im Nenner wie §. 231. weggelassen werden.



Beispiel. Für  $\alpha = 30^\circ$ ;  $a = 10$ ,  $r = 1$ ,  
 $\rho = \frac{1}{10}$  Fuß;  $Q = 1000$ ,  $M = 2000$  Pfund findet man,  
 wenn  $\mu = \frac{1}{2}$  gesetzt wird,

$$\text{nach (I) } V = \frac{10208,428}{100} = 102,084 \text{ Pfund,}$$

$$\text{nach (II) } V = \frac{1019,6}{10,0196} = 101,761 \text{ Pfund,}$$

$$\text{nach (III) } V = \frac{1019,6}{9,9804} = 102,160 \text{ Pfund.}$$

Durch ein ähnliches Verfahren wie am Ende §. 233.  
 erhält man nahe genug, wenn die Kraft vertikal auf-  
 wärts wirkt,

$$[\text{II}] \quad V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a} \left( M - \frac{a+r}{a} Q \right),$$

und wenn die Kraft vertikal unterwärts wirkt,

$$[\text{III}] \quad V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a} \left( M - \frac{a-r}{a} Q \right).$$

§. 235.

5. Zusatz. Wäre die Kraft  $V$  vertikal ab-  
 wärts gerichtet, so ist  $\alpha = 90^\circ$ , also  $\sin \alpha = 1$ ,  
 daher §. 230.

$$A = arQ + f^2 [Q \sin \beta + M] \text{ und}$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 + 2QM \sin \beta], \text{ also §. 231.}$$

$$V = \frac{arQ + f^2 (Q \sin \beta + M) + f \sqrt{[2arQ(Q \sin \beta + M) - a^2(Q^2 + M^2 + 2QM \sin \beta)]}}{a^2}.$$

§. 236.

6. Zusatz. Wäre  $r$  der Halbmesser einer festen  
 Rolle, um welche ein Seil geschlagen ist, an dessen  
 Ende die Last  $Q$  frei herunter hängt, so ist hier  $r = a$ ,  
 und man erhält die zur Erhaltung der Last und Ueber-  
 wältigung der Reibung erforderliche Kraft §. 233. III.

$$(I) \quad V = \frac{(r + f) Q + fM}{r - f}.$$

Für  $M = 0$  wird

$$(II) \quad V = \frac{r + f}{r - f} Q.$$

Es ist zur Bestimmung der Reibung gleichgültig, ob der Zapfen an der Rolle fest ist, und sich mit derselben herum dreht, oder ob sich die Rolle um einen Bolzen dreht, wenn nur im ersten Falle der Halbmesser des Zapfens, und im zweiten der Halbmesser von der Oeffnung in der Rolle statt  $\rho$  in Rechnung gebracht wird.

Beispiel. Für  $r = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{4}$  Fuß,  $Q = 1000$  und  $M = 40$  Pfund erhält man ohne Rücksicht auf das Gewicht und die Steifigkeit des Seils, für  $\mu = \frac{1}{4}$

$$f = \frac{\rho \mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{1 + \frac{1}{16}}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{\sqrt{17}}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{17}} \approx 0,00817$$

also die Kraft

$$V = \frac{5,0817 \cdot 1000 + 0,0817 \cdot 40}{4,9183} = 1033,89 \text{ Pfund.}$$

Für  $M = 0$  wäre

$$V = \frac{5,0817}{4,9183} \cdot 1000 = 1033,22 \text{ Pfund.}$$

§. 237.

7. Zusatz. An einer beweglichen Rolle B, Figur 90., sey eine Last  $W$  aufgehängt, und die Rolle werde mittelst eines um sie geschlagenen Seils  $ABV$  dergestalt gehalten, daß an dem einen Ende desselben die Kraft  $V$  vertikal aufwärts wirke, das andere Ende aber bei A befestigt sey. Der Punkt A werde mit der Kraft  $Q$  vertikal abwärts gezogen, so ist, wenn man das Gewicht der Rolle  $= M$  setzt,

Zus. IV.  
Fig. 90.

$$W + M = Q + V \text{ oder } Q = W + M - V.$$

• Weil der Obertheil der Hülse hier die Stelle der Pfanne vertritt, so denke man sich die ganze unveränderte Zurüstung umgekehrt, dann wird  $M$  negativ, und man erhält §. 233. III., weil  $a = r$  ist,

$$V = \frac{rQ + f(Q - M)}{r - f} \text{ oder } Q = \frac{(r - f)V + fM}{r + f},$$

und hieraus in Verbindung mit dem zuerst für  $Q$  gefundenen Werthe, findet man die zur Ueberwältigung der Last  $W$  und der Reibung erforderliche Kraft

$$(I) \quad V = \frac{r(W + M) + fW}{2r}.$$

Für  $M = 0$  wird

$$(II) \quad V = \frac{r + f}{2r} W.$$

• Beispiel. Die Last, welche an der Rolle hängt, wiegt 1000, und die Rolle mit dem Zubehör 40 Pfund. Ferner sey  $r = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{24}$ , und  $\mu = \frac{1}{2}$ , so ist, wie §. 236.,  
 $f = 0,00817$

$$V = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1040 + 0,00817 \cdot 1000}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 528,17 \text{ Pfund}$$

und wenn  $M = 0$  gesetzt wird

$$V = 0,50817 \cdot 1000 = 508,17 \text{ Pfund.}$$

§. 238.

• Auf. V. Bei der allgemeinen Untersuchung §. 230. ist der Unterstützungspunkt  $G$ , Figur 118., von der gesamten Zurüstung da angenommen worden, wo solchen das Gleichgewicht erfordert. Sollte man der leichtern Rechnung wegen, wie gewöhnlich, annehmen, daß der Unterstützungspunkt  $G$  in die Verticallinie  $CD$  fällt, welche durch den Mittelpunkt des Zapfens geht, so erhält man, mit Beibehaltung der angenommenen Be-

zeichnung, wenn man die Kräfte  $V$  und  $Q$  vertikal und horizontal zerlegt, die

$$\begin{aligned} \text{Summe der Vertikalpressungen} &= V \sin \alpha + \sin(180^\circ - \beta) + M \\ &= V \sin \alpha + Q \sin \beta + M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Summe der Horizontalpressungen} &= V \cos \alpha - Q \cos(180^\circ - \beta) \\ &= V \cos \alpha + Q \cos \beta \end{aligned}$$

hieraus findet man, wenn  $R$  die entspringende Mittelkraft bezeichnet (§. 20. VI.)

$$R^2 = (V \sin \alpha + Q \sin \beta + M)^2 + (V \cos \alpha + Q \cos \beta)^2$$

oder

$$R^2 = V^2 + Q^2 + M^2 + 2VQ \cos(\beta - \alpha) + 2VM \sin \alpha + 2QM \sin \beta$$

Stimmt man die Momente in Bezug auf den Umdrehungspunkt  $C$ , so erhält man

$$aV = rQ + \mu \rho R, \text{ daher } R^2 = \frac{(aV - rQ)^2}{\mu^2 \rho^2}$$

und wenn man diesen Werth statt  $R^2$  in die obige Gleichung setzt, so erhält man

$$V^2 - 2V \frac{arQ + \mu^2 \rho^2 [Q \cos(\beta - \alpha) + M \sin \alpha]}{a^2 - \mu^2 \rho^2} + \frac{r^2 Q^2 - \mu^2 \rho^2 (Q^2 + M^2 + 2QM \sin \beta)}{a^2 - \mu^2 \rho^2} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist mit dem §. 230. gefundenen ganz einerlei, nur daß daselbst  $f^2$  oder  $\frac{\mu^2 \rho^2}{1 + \mu^2}$  steht, wo hier nur  $\mu^2 \rho^2$  vorkommt. Es ist aber für

$$\mu = \frac{1}{3}; \quad \mu^2 = 0,1111 \quad \text{und} \quad \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = 0,1000$$

$$\mu = \frac{1}{4}; \quad \mu^2 = 0,0625 \quad - \quad - \quad - \quad = 0,0588$$

$$\mu = \frac{1}{5}; \quad \mu^2 = 0,0400 \quad - \quad - \quad - \quad = 0,0385$$

$$\mu = \frac{1}{6}; \quad \mu^2 = 0,0278 \quad - \quad - \quad - \quad = 0,0270$$

$$\mu = \frac{1}{10}; \quad \mu^2 = 0,0100 \quad - \quad - \quad - \quad = 0,0099$$

Da nun überdies  $\rho^2$  gewöhnlich sehr klein ist, so kann in der Ausübung um so mehr  $\mu \rho$  statt  $f$  gesetzt

werden, weil sich doch der Werth von  $\mu$  nicht ganz genau bestimmen läßt. Man kann daher alle in den vorhergehenden §. §. für  $V$  abgeleitete Werthe beibehalten, wenn man  $\mu p$  statt  $f$  setzt. Aus diesen Gründen wird man sich in der Folge jederzeit die Vorstellung erlauben, daß der Mittelpunkt sämtlicher Pressungen in die Vertikallinie fällt, welche durch den Mittelpunkt des Zapfens geht.

## §. 239.

**Aufgabe.** Das Moment der Reibung auf der Grundfläche eines stehenden Zapfens zu finden.

Zof. V.  
Fig. 119.

**1. Auflösung.** Es sey  $AA'$ , Figur 119., die ebene und kreisförmige Grundfläche eines vertikal aufwärts stehenden Zapfens, über welcher eine Last  $M$  gleichförmig verbreitet ist, so werden gleich große Theile dieser Fläche gleich stark gedrückt. Man setze den Halbmesser  $CA = r$ , und theile denselben in eine sehr große Anzahl von  $n$  gleichen Theilen, wie  $Pp$ , so ist  $Pp = \frac{1}{n} r$ , und wenn man  $CP = x$  setzt, und annimmt, daß sich der Zapfen um  $C$  dreht, so werden die Punkte  $P, p$  zwei concentrische Kreise beschreiben, zwischen welchen eine ringförmige Fläche liegt, deren Inhalt  $= \frac{1}{n} r \cdot 2\pi x = \frac{2\pi r x}{n}$  ist. Den Druck auf diese Ringfläche findet man

$$\pi r^2 : \frac{2\pi r x}{n} = M : \frac{2x}{nr} M$$

daher ist die davon entstehende Reibung  $= \frac{2\mu x}{nr} M$ , und

das Moment derselben  $= x \cdot \frac{2\mu x}{nr} M = \frac{2\mu x^2}{nr} M$ ,

wobei vorausgesetzt ist, daß  $n$  außerordentlich groß, also  $\frac{1}{n}$  ein äußerst kleiner Bruch wird.

Sucht man nun für jedes Theilchen wie  $Pp$  das zugehörige Moment der Reibung, indem  $x$  nach einander die Werthe  $\frac{1}{n}r$ ,  $\frac{2}{n}r$ ,  $\frac{3}{n}r \dots$  bis  $\frac{n}{n}r$  erhält, so muß die Summe dieser Momente dem Momente der Reibung von der ganzen Fläche  $AA'$  gleich seyn.

Für das erste Theilchen bei  $C$  ist  $x = \frac{1}{n}r$ , also so das Moment der Reibung  $= \frac{2\mu r^2}{n^2} M = \frac{2\mu r}{n^2} M$ .

Für das zweite Theilchen ist  $x = \frac{2}{n}r$ , also das Moment  $= \frac{2 \cdot 4\mu r}{n^2} M$ .

Für das dritte Theilchen,  $= \frac{2 \cdot 9\mu r}{n^2} M$  u. s. w.

Endlich für das  $n$ te oder letzte Theilchen findet man das Moment  $= \frac{2n^2\mu r}{n^2} M$ .

Die Summe aller Momente ist alsdann  $= \frac{2\mu r}{n^2} M (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2)$ .

Nun ist nach bekannten Regeln die Summe von den Quadraten der natürlichen Zahlen  $= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$  oder weil  $n$  eine äußerst große Zahl ist, wie es die vorhergehenden Bedingungen erfordern, so kann ohne Nachtheil eine Einheit mehr oder weniger weggelassen werden, und man erhält die Summe der Quadrate  $= \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$ , daher das Moment der Reibung von

der Grundfläche des stehenden Zapfens =

$$\frac{2\mu r}{n^2} \cdot \frac{n^2}{3} M = \frac{2}{3} \mu r M.$$

Am Umfange des Zapfens nach der Richtung der Tangente sey eine Kraft  $F$  angebracht, welche mit der Reibung im Gleichgewichte ist, so ist das Moment der Kraft  $rF = \frac{2}{3} \mu r M$ , und man findet hieraus die Kraft, welche am Umfange des Zapfens der Reibung auf der Grundfläche desselben das Gleichgewicht hält, oder

$$F = \frac{2}{3} \mu M.$$

\* 2. Auflösung. Mittelt der höhern Analysis erhält man mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung eben dieses Resultat, wenn man  $Pp = \partial x$  setzt, so ist der Inhalt für die zu  $\partial x$  gehörige Ringfläche  $= 2\pi x \partial x$ ; der Druck darauf  $= \frac{2x\partial x}{r^2} M$ ; die Reibung  $= \frac{2\mu x\partial x}{r^2} M$ ; das Moment derselben  $= \frac{2\mu x^2\partial x}{r^2} M$ ; also die Summe der Momente von C bis P für den Halbmesser  $CP = x$

$$\int \frac{2\mu x^2\partial x}{r^2} M = \frac{2\mu x^3}{3r^2} M$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Moment mit  $x = 0$  verschwindet. Für  $x = r$  erhält man das Moment der Reibung für die ganze Fläche  $AA' = \frac{2}{3} \mu r M$  und wenn dies  $= rF$  gesetzt wird, so ist die zur Ueberwältigung der Reibung am Umfange des Zapfens erforderliche Kraft  $F = \frac{2}{3} \mu M$ .

Mit Hülfe dieses Satzes und der Auflösung §. 230.

läßt sich die Reibung bei der stehenden Welle oder Binde leicht finden.

Anmerkung. In Barstens Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, 2. Band, 1780. S. 713. findet man diesen Satz noch auf eine andere Art, ohne höhere Analysis erwiesen.

§. 240.

Die Ase AB, Figur 120., von der Welle einer Tretscheibe sey gegen die Vertikale CD unter dem Winkel  $BCD = \gamma$  geneigt, auch sey FG die Durchschnittslinie, in welcher die erweiterte Vertikalebene BCD die Tretscheibe schneidet. Im Punkte E sey der mittlere Stand des Menschen oder Thieres, welches durch sein Gewicht P auf die Umdrehung der Scheibe wirkt, und in N wirke am Umfange der Welle eine Kraft Q in einer mit der Tretscheibe parallelen Ebene. Man setze EC oder den Halbmesser der Scheibe  $= a$ ; den Halbmesser der Welle  $= r$ , und den Winkel  $GCE = \alpha$ , und zerlege die Kraft P nach EK mit FG parallel, und nach EL auf die Scheibe winkelrecht, so ist der Winkel  $IEL = DCB = \gamma$ , also die Kraft nach EK oder  $P' = P \sin \gamma$  und die Kraft nach EL oder  $P'' = P \cos \gamma$ .

Taf. V.  
Fig. 120.

7

a  
r  
a

Die Kraft  $P''$  wirkt parallel mit der Ase AB, und verursacht Druck auf den untern Zapfen, aber keine Bewegung; wenn man aber EK rückwärts nach H in der Ebene der Scheibe verlängert, und CH auf EH winkelrecht zieht, so ist CH die Länge des Hebelarms, an welchem die Kraft  $P'$  winkelrecht wirkt. Nun ist



$CH = EC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$ ,  
 daher das Moment der Kraft  $P'$ , welches mit dem  
 Momente der Last im Gleichgewichte seyn muß,  
 $= CH \cdot P' = a P' \sin \alpha$ .

Ohne Rücksicht auf Reibung ist dies Moment  $= rQ$ ,  
 daher

$$a \sin \alpha \sin \gamma P = rQ$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{rQ}{a \sin \alpha \sin \gamma}.$$

Die Kraft  $P$  wird daher unter übrigens gleichen Umständen am kleinsten, wenn  $\sin \alpha$  und  $\sin \gamma$  so groß als möglich genommen werden. Dies giebt  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ . Da nun  $\gamma$  nicht leicht größer als 15 Grad genommen werden kann, wenn  $\alpha = 90$  Grad gesetzt wird; weil sonst der Gang für Menschen oder Vieh zu beschwerlich wird, so erhält man in diesem Falle für  $\sin \alpha = 1$  und  $\sin \gamma = \sin 15^\circ = 0,258819$ , die Kraft

$$P = \frac{rQ}{0,258819 \cdot a} \text{ oder beinahe } = \frac{7rQ}{27a}.$$

§. 241.

**Aufgabe.** Die Kraft zu bestimmen, welche zur Ueberwältigung der Last und Reibung an der Tretscheibe erfordert wird.

**Auflösung.** Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. sey  $M$  das Gewicht der Welle und Scheibe, und  $P$  bezeichne hier diejenige Kraft, welche sowohl mit der Last  $Q$ , als auch mit den Widerständen, welche von der Reibung entstehen, im Gleichge-

wichte ist, so zerlegt sich das Gewicht  $M$  in der erweiterten Ebene  $FGB$ , Figur 120., winkelmäßig auf die Axe  $AB$  in eine Kraft

Taf. V.  
Fig. 120.

$$M' = M \sin \gamma$$

und nach der Richtung  $AB$  in eine Kraft

$$M'' = M \cos \gamma$$

welche die Grundfläche des untern Zapfens gegen die Pfanne preßt. Der gesammte Druck gegen die Pfanne nach der Richtung  $AB$  ist alsdann =

$$P' + M'' = (P + M) \cos \gamma$$

also das Moment der von diesem Drucke entstehenden Reibung §. 239., wenn  $\rho$  den Halbmesser der Zapfen bezeichnet, =  $\frac{2}{3} \mu \rho (P + M) \cos \gamma$ . Zur Ueberwältigung dieser Reibung werde in  $H$  nach  $HE$  eine Kraft  $p$  erfordert, so ist

$$p : a \sin \alpha = \frac{2}{3} \mu \rho (P + M) \cos \gamma \text{ oder}$$

$$p = \frac{2 \mu \rho \cos \gamma}{3 a \sin \alpha} (P + M).$$

Die aus dem Gewichte  $P$  in  $H$  nach  $HE$  entspringende Kraft  $P'$  ist =  $P \sin \gamma$ , daher ist  $P \sin \gamma - p$  diejenige Kraft, welche mit der Last  $Q$  und der Reibung an den Seitenflächen im Gleichgewichte seyn muß. In der Ebene der Scheibe sey  $N'Q'$  die Projection von der Richtung  $NQ$  der Kraft  $Q$ , und  $\beta$  der Winkel, welchen  $N'Q'$  mit der Linie  $CH$  (in dem Sinne §. 230.) bildet, so ist die Richtung der Kraft  $P'$  auf  $CH$  winkelmäßig, daher, weil  $p$  keinen Seitendruck gegen die Zapfen verursachen kann, und weil  $CH = a \sin \alpha$  ist, nach §. 231.

$$P' - p = \frac{A + \sqrt{A^2 - a^2 \sin^2 \alpha B}}{a^2 \sin \alpha^2}$$

wo nach §. 235.

$A = arQ \sin \alpha + f^2 [Q \sin \beta + M \sin \gamma]$  und

$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 \sin^2 \gamma + 2QM \sin \beta \sin \gamma]$  ist.

Werden für  $P'$  und  $p$  die gefundenen Werthe gesetzt, und daraus  $P$  entwickelt, so findet man die Kraft

$$P = \frac{3A + 2\mu a \rho M \sin \alpha \cos \gamma + 3\sqrt{(A^2 - a^2 B \sin^2 \alpha)}}{a \sin \alpha (3a \sin \alpha \sin \gamma - 2\mu \rho \cos \gamma)}$$

§. 242.

Zusatz. Wäre der Winkel  $\alpha = 90$  Grad, so wird

$$A = arQ + f^2 [Q \sin \beta + M \sin \gamma]$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 \sin^2 \gamma + 2QM \sin \beta \sin \gamma]$$

und die Kraft

$$P = \frac{3A + 2\mu a \rho M \cos \gamma + 3\sqrt{(A^2 - a^2 B)}}{3a^2 \sin \gamma - 2\mu a \rho \cos \gamma}$$

Beispiel. Es sey  $Q = 1000$ ,  $M = 400$  Pfund;  
 $a = 10$ ,  $r = \frac{2}{3}$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$  Fuß;  $\beta = 90$ ,  $\gamma = 15$  Grad  
 und  $\mu = \frac{2}{5}$ , so ist  $f^2 = 0,000267$  (§. 230.)

$$A = \frac{20000}{3} + 0,000267 \cdot (1000 + 103,5276) = 6666,9613$$

$$B = 444444,444 - 0,000267 \cdot 1217756,39 = 444119,303$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{20000,884 + 128,788 + 572,697}{77,646 - 0,322} = 267,73 \text{ Pfund.}$$

## Zehntes Kapitel.

### Vom Räderwerk und der Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen.

#### §. 243.

Zwei oder mehrere Räder welche sich an verschiedenen Axen befinden, so daß durch die Umdrehung des einen Rades das andere ebenfalls bewegt wird, bilden ein Räderwerk (*Systema rotarum, Rouage*). Die wechselseitige Umdrehung der Räder kann dadurch bewirkt werden, daß Erhöhungen des einen Rades in passende Vertiefungen des andern eingreifen. Liegen die Erhöhungen in der Ebene des Rades nach der Richtung seiner Halbmesser, so heißen sie Zähne (*Dentes, Aluchons, Dents*) und das Rad ein Stirnrad, auch wohl Sternrad (*Rota stellata, Roue platte*). Stehen sie hingegen winkelrecht auf der Ebene des Rades, so heißen diese Erhöhungen Kämme (*Paxilli*) und das Rad ein Kammrad oder Kronrad (*Rota coronaria, R. pectinata. Roue à couronne, Roue à chan*). Statt der Stirnräder bedient man sich auch der Trillinge (*Laterna, Lanterne*), welche aus zwei parallelen Scheiben (*Tourtes ou Taurteaux*) bestehen, die vermittelt mehrerer am Umfänge angebrachter

Stäbe, Triebstöcke (*Bacilli. Fuseaux*) mit einander verbunden sind. Diese Triebstöcke vertreten die Stelle der Zähne. Große Trillinge werden auch Drehlinge genannt. Sind die Triebstöcke nicht zwischen parallelen Scheiben eingesezt, sondern in dem Umfang einer Welle ausgearbeitet, so entsteht ein Kumpf (*Axis dentatus*), dessen Zähne Stäbe (*Alles*) heißen. Uebrigens sind unter dem allgemeinen Namen Zähne (*Dents*), die Zähne, Stöcke, Stäbe oder Kämme eines Rades begriffen. Durch Verbindung eines Stirnrades und Trillings wird gewöhnlich die Umdrehung zweier Räder in einerlei Ebene bewirkt. Sind aber die Ebenen zweier Räder auf einander winkelrecht, so bedient man sich hiezu eines Kammrades und Trillings. Das kleinere Rad bei der Zusammensetzung zweier Räder, wird ein Getriebe (*Rotula. Pignon*) genannt, und ist gewöhnlich ein Trilling oder Drehling.

Stehen die Ebenen zweier Räder nicht winkelrecht auf einander, sondern schneiden sich unter einem spitzen oder stumpfen Winkel, so heißen sie konische Räder, welche Benennung überhaupt von allen den Rädern gilt, bei welchen die Kämme schief auf der Ebene des Rades stehen.

Die Umdrehung zweier Räder kann auch ohne Zähne und Kämme bewirkt werden, wenn um die Umfänge derselben, welche deshalb eine Vertiefung erhalten, eine an beiden Enden zusammen gefügte Schnur, oder Schnur ohne Ende gelegt wird. Diese Ad-

der heißen Seilräder, bei welchen man sich auch le-  
derner Riemen statt der Schnüre bedienen kann.

§. 244.

**Aufgabe.** Mehrere Räder sind so mit einander  
verbunden, daß immer zwei an einer gemeinschaftlichen  
Welle befestigt, und das Getriebe einer Welle in das  
nächste Rad der andern eingreift, dergestalt daß durch  
die Umdrehung des ersten Rades das ganze Räder-  
werk in Bewegung kommt. Am Umfange des ersten  
Rades A, Figur 121., wirkt nach der Richtung der  
Tangente eine Kraft P und am Umfange des letzten  
Rades F eine Last Q; man sucht die Bedingungen  
für das Gleichgewicht.

Kaf. V.  
Fig. 121.

**Auflösung.** Man bezeichne die Halbmesser der  
Räder A, B, C, durch a, a', a'' und der Getriebe D,  
E nebst dem letzten Rade F durch r, r', r'', so wird  
die Kraft P am Umfange des ersten Getriebes D ge-  
gen den Zahn des Rades B einen Druck  $P' = \frac{a}{r} P$   
verursachen (§. 48.). Dieser Druck P' pflanzt sich fort,  
und bewirkt am Umfange des dritten Rades C einen  
Druck  $P'' = \frac{a'}{r'} P' = \frac{a a'}{r r'} P$ , welcher mit der Last Q  
am letzten Rade F im Gleichgewichte seyn muß. Für  
diesen Fall ist  $a'' P'' = r'' Q$  und hieraus die Last

$$Q = \frac{a a' a''}{r r' r''} P$$

und die Kraft

$$P = \frac{r r' r''}{a a' a''} Q$$

Es läßt sich einsehn, daß dieß eben so für mehrere Räder gilt, daher verhält sich ganz allgemein die Kraft zur Last, wie das Produkt aus den Halbmessern der Getriebe, zum Produkt aus den Halbmessern der Räder.

Je kleiner unter übrigens gleichen Umständen die Halbmesser der Getriebe sind, eine desto größere Last  $Q$  kann man alsdann mit einerlei Kraft  $P$  überwinden.

Liegen die Räder nicht in parallelen Ebenen, so läßt sich die Auflösung auf gleiche Art ableiten.

§. 245.

**Zusatz.** Damit von zwei zusammengehörigen Rädern welche in einander greifen, gleich lange Bogen ihres Umfanges in gleicher Zeit fortgeschoben werden, müssen diese Bogen gleich viel Zähne haben. Die Anzahl der Zähne solcher Räder verhält sich alsdann wie ihre Umfänge und diese wie ihre Halbmesser. Sind daher  $m, m', m''$  die Anzahl der Zähne von den Rädern  $A, B, C$  und  $n, n', n''$  die Anzahl der Zähne von den Getrieben  $D, E, F$ , so verhält sich  $a : r = m : n$ , oder es ist überhaupt  $\frac{r r' r''}{a a' a''} = \frac{n n' n''}{m m' m''}$ , daher die Kraft

$$P = \frac{n n' n''}{m m' m''} Q.$$

§. 246.

Bei Beurtheilung der besten Gestalt der Zähne, Triebstöcke und Rämme sind die Fälle zu unterscheiden, wo Zähne und Stöcke, Zähne und Zähne, Rämme und Stöcke oder Rämme und Zähne zweier Räder

wechselseitig in einander greifen. Damit diese Untersuchung möglichst vereinfacht werde, wird jeder dieser Fälle besonders auseinander gesetzt, und dabei die im Anhange erwiesenen Eigenschaften der Epicycloide und die Art wie solche gezeichnet werden kann, als bekannt angenommen.

Soll nun ein Rad das andere so forttreiben, daß die Bewegung ohne Erschütterung und mit unveränderter Kraft erfolgt, so müssen

I. in gleichen Zeiten gleich große Bogen von dem Umfange eines jeden Rades fortgeschoben werden. Dies muß aber von jedem noch so kleinen Bogen eben so wie von jedem größern gelten.

II. Für jede Lage der Zähne muß die Kraft mit welcher ein Rad das andere umtreibt gleich groß bleiben.

Nur unter diesen Bedingungen finden die Sätze der vorhergehenden §. §. ihre Anwendung. Auch läßt sich einsehen daß alsdann keine Kraft ohne Nutzen verwandt wird, und das Räderwerk eine regelmäßige Bewegung erhalten muß.

§. 247.

Aufgabe. Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne eines Stirnrades anzugeben, wenn das zugehörige Getriebe mit Triebstöcken versehen ist.

1. Auflösung. Wenn die Triebstöcke als Linien ohne Dicke vorausgesetzt werden.

Es sey, Figur 122.,  $CA = a$  der Halbmesser des Rades und  $GA = r$  der Halbmesser des Getriebes; beide Räder welche sich frei um ihre unbeweglichen

Taf. V.  
Fig. 122.



Mittelpunkte drehen können, berühren sich in A, und ihre Mittelpunkte sind durch die grade Linie CAG welche die Mittelpunktslinie (*Ligne des centres*) heißt, mit einander verbunden. Auf dem Umfange XAZ des Rades sey eine Epicycloide AA' beschrieben, deren erzeugender Kreis mit dem Umfange des Getriebes überein kommt. Diese Epicycloide sey eine feste unbiegsame Linie, und in ihrem Anfangspunkte A mit dem Rade XZ so verbunden, daß bei der Umdrehung des Rades der Bogen AA' mit bewegt werde. Winkelrecht auf die Ebene des Getriebes sey am Umfange desselben in A, ein Triebstock ohne Dicke befestigt, welcher sich mit dem Getriebe zugleich umdreht. Wird nun der Punkt A des Rades von A bis B gedreht, und der Triebstock A befindet sich vor dem Bogen AA', so ist solcher durch diesen Bogen von A bis O geschoben, wenn nunmehr AA' in die Lage BB' gekommen ist.

Weil CA der Halbmesser des Grundkreises, und  $AG = GO$  der Halbmesser des erzeugenden Kreises der Epicycloide BB' ist, so muß (Anhang §. 13.) der Bogen AB dem Bogen AO gleich seyn, und weil dies für jeden kleinern oder größern Bogen wie AB eben so gilt, so ist durch die Anbringung der Epicycloide BB' die erste Bedingung §. 246. erfüllt.

Man ziehe die Sehne AO, so wird der Zahn BB' in den Stock O nach der Richtung AO wirken, weil das Element des Zahns im Berührungspunkte O die Linie AO zur Normale hat. (§. 17. Anhang). Ist

Wenn  $P$  die Kraft welche am Umfange des Rades in  $A$  nach der Richtung der Tangente  $AE$  wirkt, so läßt sich  $P$  in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die eine nach  $AC$  wirkt und vom festen Punkte  $C$  aufgehoben wird; die andere wirkt nach  $AO$  auf den Zahn und sey  $= P'$ , so ist  $P' \sin AOE = P$ . Aber  $AOE = OAG$ , daher ist die Kraft welche den Triebstoß  $O$  nach der Richtung  $OH$  forttreibt oder

$$P' = \frac{P}{\sin OAG} \text{ und } P = P' \sin OAG.$$

Der Halbmesser des Getriebes  $GO$  werde unbestimmt bis  $I$  verlängert, so kann man die Kraft  $P'$  nach  $OI$  und winkelrecht auf  $OG$  nach der Tangente des Getriebes  $OK$  zerlegen, wovon die Kraft nach  $OI$  durch den festen Punkt  $O$  aufgehoben wird, die andere nach  $OK$  welche  $= Q$  seyn kann, drückt das Getriebe nach der Richtung seiner Tangente. Alsdann ist  $P' \sin OHK = Q$  oder weil  $OHK = OAG$ , so findet man auch

$$Q = P' \sin OAG, \text{ folglich ist}$$

$$Q = P.$$

Der Triebstoß  $O$  wird daher von dem Bogen  $BB'$  in jeder Lage desselben eben so fortgeschoben, als wenn die Kraft  $P$  welche am Umfange des Rades wirkt, unmittelbar am Umfange des Getriebes nach der Richtung seiner Tangente angebracht wäre.

Daß  $Q = P$  seyn muß, hätte man auch aus dem Gesetze der Statik §. 69. ableiten können, denn wenn  $w$  den Weg von  $P$ , und  $w'$  den Weg von  $Q$

bezeichnet, welche bei der geringsten Fortbewegung durchlaufen werden, so ist erwiesen, daß in allen Lagen des Systems  $w = w'$  ist, daher muß auch  $P = Q$  seyn, wodurch die zweite Bedingung §. 246. erfüllt wird.

Bestehen daher die Triebstöcke aus festen Linien ohne Dicke, so erhält man die vortheilhafteste Gestalt für die Zähne des Rades, wenn man dazu den Bogen einer Epicycloide wählt, deren Grundkreis der Umfang des Rades, und deren Erzeugungskreis der Umfang des Getriebes ist.

Sollte der Triebstock O nicht durch den Bogen BB', sondern das Rad mittelst des Bogens BB' durch den Triebstock O fortgetrieben werden, so bleibt alles wie bisher, nur daß die Bewegung des Rades von A nach X, und nicht nach AZ geht.

2. Auflösung. Wenn die Triebstöcke aus cylindrischen Stäben von gegebener Dicke bestehen.

Zaf. V.  
Fig. 123.

Die Halbmesser AC, Figur 123., des Rades und AG des Getriebes liegen in der Mittelpunktslinie CG, und in A sey der Durchschnitt eines Stocks, dessen Halbmesser Aa ist. Durch A als Anfangspunkt sey die Epicycloide AA' nach den Bedingungen der vorigen Auflösung gezeichnet. Mit dem Halbmesser Aa zeichne man auf der konvexen Seite des Bogens AA' lauter Halbkreise, und ziehe durch die Scheitel derselben die krumme Linie aa', so ist diese eine Parallele der Epicycloide AA', und zugleich die erforderliche Gestalt des Zahns. Kommt alsdann der Mittelpunkt A des Stocks nach O, und der Bogen AA' nach BB',

also  $aa'$  nach  $bb'$ , und man zieht die zum Punkte O der Epicycloide gehörige Normale OA, so ist da, wo solche den Umfang des Stocks und Zahns in o schneidet, der Berührungspunkt beider Oberflächen, weil  $Oo = Aa$  ist. Es gelten daher hier vom Punkte O eben die Sätze, welche bei der ersten Auflösung erwiesen sind, daher findet man, wenn Zähne und Triebstöcke in einander greifen, die beste Gestalt der Zähne, wenn der Umfang (ZX) des Rades als Grundkreis angenommen, und darauf eine Epicycloide (AA') beschrieben wird, deren Erzeugungskreis dem Umfange (VW) des Getriebes gleich ist. Wird hierauf in einer Entfernung, welche dem Halbmesser (Aa) der Triebstöcke gleich ist, eine parallele Kurve ( $aa'$ ) mit der Epicycloide gezogen, so erhält man die Rundung der Zähne.

§. 248.

Weil nur der Bogen  $aa'$ ,  $bb'$ , Figur 123., der Zähne mit den Stöcken in Berührung kommt, so ist es ziemlich gleichgültig, welche Gestalt der übrige Theil des Zahns erhält, wenn nur dadurch die Bewegung der Triebstöcke nicht verhindert wird. Es ist aber am zuträglichsten, die Zähne, wie bei  $bb'd$ , symmetrisch zu formen, weil alsdann auch eine Rückwärtsbewegung des Rades statt haben kann, und weil in diesem Falle die Zähne an ihrem abgerundeten Theile noch die größte Stärke erhalten, welche die freie Bewegung der Stöcke gestattet.

Taf. V.  
Fig. 123.

Der Theil  $bb'd$  des Zahns, welcher über den

Bogen XZ fällt, und der Obertheil heißen kann, ist von dem Untertheile b d e f darin verschieden, daß dieser bei b f und d e nach graden Linien geformt wird, welche sich in C vereinigen, weil man diese Linien als Tangenten von den Bogen b b' und d b' in den Punkten b und d ansehen kann. Nach §. 17. des Anhangs ist CB eine Tangente in B von BB, also eine mit BC durch b gezogene Parallellinie, eine Tangente von b' b in b; wofür man b f ohne Nachtheil annehmen kann. Die Höhe d e vom Untertheile des Zahns darf nur etwas größer als der Halbmesser des Triebstocks seyn.

Bei einem symmetrischen Zahne f b' e' ist b' der Scheitel oder Kopf, b d die Brust oder Breite, und f e der Fuß des Zahns, welcher mit der Stirn des Radekranzes RS zusammenfällt. Die Dicke des Zahns kommt hier nicht in Betrachtung, weil der Zahn als ein prismatischer Körper angesehen werden kann, dessen Grundfläche die Ebene f b' e, und dessen Höhe die Dicke des Zahns ist.

Damit in der Folge keine Ungewißheit über die Größe vom Halbmesser des Stirnrades entsteht, so wird hier allemal der Halbmesser  $CA = CE$ , vom Mittelpunkte C bis zur Brust der Zähne darunter verstanden werden, weil nur dieser Halbmesser bei der Anordnung des Räderwerks und bei der Bestimmung der Kraft in Betrachtung kommt. Man nennt ihn auch den ursprünglichen Halbmesser (*Rayon primitif*) um ihn vom wirklichen oder Totalhalbmesser

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 347

(*Rayon vrai*)  $Cb'$ , welcher bis zum Kopf des Zahns reicht, zu unterscheiden. Der zum Halbmesser  $CA$  gehörige Kreis  $XZ$  heißt der Umfang des Stirnrades, auch der Theilriß oder Theilkreis, weil auf demselben die Zähne eingetheilt werden. Die Breite  $bd$  eines Zahns (*le plein*), nebst der Zwischenweite  $da$  (*le vuide*) zusammengenommen, der Bogen  $ab$ , oder der Abstand von der Mitte eines Zahns bis zur Mitte des nächsten, wird die Theilung genannt. Berühre der Stöß  $A$  bei  $a$  den Zahn  $F$ , so heißt der Abstand dieses Stößs  $A$  vom nächsten Zahne  $E$  oder die Weite  $cd$  der Spielraum (*Jeu*) zwischen Zahn und Stöß, welchen man aber so klein als möglich annehmen muß.

Eben so ist  $GA$  der Halbmesser des Getriebes, welcher jedesmal vom Mittelpunkte  $G$  bis zum Mittel des Stößs gerechnet wird. Der zu diesem Halbmesser gehörige Kreis  $VW$  heißt der Umfang oder Theilriß des Getriebes. Die Theilung  $AO$  desselben ist der Theilung des Rades gleich.

### §. 249.

Das Rad  $XZ$ , Figur 122., sey mit den Zähnen  $AA'$ ,  $BB'$  und das Getriebe  $VW$  mit den Stößen  $A$ ,  $O$  versehen, so daß beide gleiche Theilung  $AB = AO$  haben, so wird bei der erforderlichen Gestalt und Länge der Zähne, wenn im Berührungspunkt  $A$  beider Theilkreise Zahn und Stöß zusammentreffen, auch bei  $O$  eine Berührung zwischen Zahn und Stöß statt finden (§. 247.). Dreht man nun das Rad und Getriebe von  $A$  nach  $X$  und  $V$  so weit rückwärts,

Kaf. V.  
Fig. 122.

daß der Stod aus A nach a und der Zahn von A nach b komme, dergestalt daß der Bogen Aa dem Bogen Ab gleich ist, so kann der Zahn bb' den Stod a nicht berühren, weil in jedem Falle wenn  $AC > AG$  ist, der Winkel ACa kleiner als ACb seyn muß. Da dies von jedem noch so kleinen Bogen Aa gilt, so folgt daraus, daß wenn ein Getriebe mit Stöcken durch ein Rad mit Zähnen bewegt wird, so kann kein Zahn vor der Mittelpunktslinie (CG) einen Stod treffen; nur in der Mittelpunktslinie kann der Zahn mit dem Stod in Berührung kommen, welche hinter der Mittelpunktslinie so lange fortwähren muß, bis sich der Stod vom äußersten Ende des Zahns abgewunden hat. Dieser Satz läßt sich eben so auf Triebstöcke von gegebener Dicke, Figur 123., anwenden. Nur daß alsdann wenn das Getriebe vom Rade bewegt wird, die erste Berührung zwischen Zahn und Stod erfolgt, wenn der Mittelpunkt des Stocks in den Berührungspunkt A der Mittelpunktslinie fällt.

Kaf. V.  
Fig. 123.

Wird das Rad vom Getriebe bewegt, so folgt umgekehrt daß der Zahn den Stod verlassen muß, wenn der Mittelpunkt des Stocks in die Mittelpunktslinie beider Räder fällt.

Aus der nähern Betrachtung der Figur 123. sieht man ferner, daß wenn der Stod A vom Zahn F von A bis O getrieben wird, so ist der Bogen bo des Zahns mit dem Stod in Berührung gewesen, dagegen kommen von dem Stode nur die beiden kleinen Bo-

gen  $a h$  und  $o p$  mit dem Zahn in Berührung. Daher ist die Bewegung der Zähne und Stöcke auf einander nicht wälzend, sondern wälzend und gleitend. Auch sieht man hieraus, daß die Stöcke verhältnißmäßig weit mehr als die Zähne abgenutzt werden.

Treibt der Zahn den Stock, so bewegt sich der Stock auf dem Zahne von  $b$  nach  $o$ ; treibt aber der Stock den Zahn, so bewegt sich der Stock von  $o$  nach  $b$ . Bei metallenen Zähnen ist beides gleichgültig; bei hölzernen aber, wo die Fläche  $o b$  gewöhnlich über den Spahn geschnitten ist, wird die Bewegung deshalb erschwert, und sofern ist es vorteilhafter, wenn der Zahn den Stock als wenn der Stock den Zahn fort treibt.

Es ist zureichend wenn jedesmal nur ein Zahn mit einem Stock in Berührung kommt, weil sonst die Zähne unnöthig lang werden müssen. Man kann daher die Anordnung so machen, daß in dem Augenblick wenn ein Zahn einen Stock berührt, der vorhergehende Zahn seinen Stock verläßt oder sich auswindet. Fällt nun der Mittelpunkt des Stocks  $A$  in die Mittelpunktslinie  $C G$ , und man zieht die Sehne  $A O$  bis zum Mittel des nächsten Stocks, so ist  $o$  der Berührungspunkt zwischen Zahn und Stock (§. 17. Anhang). Da nun  $a$  der Ort ist, wo der Zahn  $F$  den Stock  $A$  einholt, und solchen von  $a$  bis  $o$  fortführt, so ist es zureichend wenn man mit dem Halbmesser  $C o$  den Zahn von  $o$  nach  $r$  abrundet, oder, damit bei  $o$  keine scharfe Ecke entsteht, wenn man dem Zahn eine geringe Wölbung  $o s r$  giebt, welche die beiden Bogen  $o b$  und



$r$  d bei  $o$  und  $r$  berührt. Die größte Länge, welche der Obertheil des symmetrischen Zahns erhalten kann ist  $E b'$ , und die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns  $o k$ . Noch kleiner darf kein Obertheil des Zahns werden, weil sonst ein Stoßen der Zähne gegen die Stöcke erfolgt.

## §. 250.

Um zu übersehen, wie diejenigen Größen, welche bei der Anordnung eines Räderwerks vorkommen können, von einander abhängen, sey Figur 123.

Taf. V.  
Fig. 123.

$a = AC$  der Halbmesser vom Theilkreise des Rades,  
 $r = AG$  der Halbmesser vom Theilkreise des Getriebes,

$t = AO = AB$  die Theilung,

$m$  die Anzahl der Zähne des Rades,

$n$  die Anzahl der Stöcke des Getriebes,

$\alpha = ACB$  der Mittelpunktswinkel für die Theilung  $AB$  des Rades in Graden  $\alpha$  ausgedrückt

$\beta = AGO$  der Mittelpunktswinkel für die Theilung  $AO$  des Getriebes,

Arc  $\alpha$  der Bogen für den Halbmesser  $= 1$ , welcher dem Winkel  $\alpha$  entspricht, und eben so

Arc  $\beta$  der zum Winkel  $\beta$  gehörige Bogen.

Nun verhält sich  $\alpha : 360^\circ = \text{Arc } \alpha : 2\pi$ , es ist daher

$$\text{Arc } \alpha = \frac{\pi \alpha}{180} \text{ und eben so } \text{Arc } \beta = \frac{\pi \beta}{180} \text{ [I].}$$

Serner verhält sich  $1 : \text{Arc } \alpha = a : t$ , daher ist

$$t = a \text{ Arc } \alpha = r \text{ Arc } \beta \text{ [II].}$$

Aus [I] und [II] folgt ferner

$$t = \frac{\pi a a}{180} = \frac{\pi \beta r}{180} \text{ [III]}$$

und hieraus

$$a a = \beta r \text{ [IV]}$$

Der Umfang des Theilkreises vom Rade ist  $= 2\pi a$ ,  
daher

$$m t = 2\pi a \text{ und } n t = 2\pi r \text{ [V]}$$

woraus noch folgt

$$n a = m r \text{ [VI].}$$

Aus diesen sechs Gleichungen erhält man folgende  
Zusammenstellung

$$\text{(I)} \quad a = \frac{\beta r}{\alpha} = \frac{m r}{n} = \frac{m t}{2\pi} = \frac{180 t}{\pi \alpha}$$

$$\text{(II)} \quad r = \frac{\alpha a}{\beta} = \frac{n a}{m} = \frac{n t}{2\pi} = \frac{180 t}{\pi \beta}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad t &= \frac{\pi a a}{180} = \frac{2\pi a}{m} = a \text{ Arc } \alpha = \frac{m r}{n} \text{ Arc } \alpha \\ &= \frac{\pi \beta r}{180} = \frac{2\pi r}{n} = r \text{ Arc } \beta = \frac{n a}{m} \text{ Arc } \beta \end{aligned}$$

$$\text{(IV)} \quad m = \frac{360}{\alpha} = \frac{360 a}{r \beta} = \frac{n a}{r} = \frac{2\pi r}{t}$$

$$\text{(V)} \quad n = \frac{360}{\beta} = \frac{360 r}{\alpha a} = \frac{m r}{a} = \frac{2\pi r}{t}$$

$$\text{(VI)} \quad \alpha = \frac{360}{m} = \frac{360 r}{n a} = \frac{r \beta}{a} = \frac{180 t}{\pi a}$$

$$\text{(VII)} \quad \beta = \frac{360}{n} = \frac{360 a}{m r} = \frac{\alpha a}{r} = \frac{180 t}{\pi r}$$

$$\text{(VIII)} \quad \text{Arc } \alpha = \frac{\pi a}{180} = \frac{2\pi}{m} = \frac{t}{a} = \frac{2\pi r}{n a}$$

$$\text{(IX)} \quad \text{Arc } \beta = \frac{\pi \beta}{180} = \frac{2\pi}{n} = \frac{t}{r} = \frac{2\pi a}{m r}$$

Hierbei ist  $\frac{1}{\pi} = 0,318309886$

also  $\frac{1}{2\pi} = 0,159154943.$

## §. 251.

Kap. V.  
Fig. 123.

**Aufgabe.** Aus dem Halbmesser  $AC = a$ , Fig. 123., des Stirnrades, dem Halbmesser  $GA = r$  des Getriebes, der halben Dicke eines Stocks  $Oo = d$ , und dem Winkel  $AGO = \beta$ , welcher am Mittelpunkte des Getriebes zur Theilung  $AO$  gehört, die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns oder  $ok = l$  durch Rechnung zu finden.

**Auflösung.** Zieht man aus  $G$  auf die Sehne  $AO$  eine winkelrechte Linie, so erhält man in einem der entstandenen rechtwinklichten Dreiecke  $\frac{1}{2}AO = r \sin \frac{1}{2}\beta$ , also  $AO = 2r \sin \frac{1}{2}\beta$ , oder, wenn  $Oo = d$  weggenommen wird,  $Ao = 2r \sin \frac{1}{2}\beta - d$ . Es ist aber der Winkel  $oAC = 180^\circ - OAG = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$ , daher

$$\cos oAC = \cos (90^\circ + \frac{1}{2}\beta) = -\sin \frac{1}{2}\beta$$

und man erhält im Dreieck  $ACo$

$$Co^2 = AC^2 + Ao^2 - 2 \cdot AC \cdot Ao \cdot \cos oAC$$

oder

$$(a+l)^2 = a^2 + (2r \sin \frac{1}{2}\beta - d)^2 + 2a(2r \sin \frac{1}{2}\beta - d) \sin \frac{1}{2}\beta.$$

Hieraus findet man die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns, oder

$$l = -a + \sqrt{a^2 + (2r \sin \frac{1}{2}\beta - d)^2 + 2a(2r \sin \frac{1}{2}\beta - d) \sin \frac{1}{2}\beta}.$$

**Beispiel.** Das Rad habe 32 Zähne, und das Getriebe 7 Stöcke, beide Räder aber 4 Zoll Theilung, so ist §. 250. (1) der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{mt}{2\pi} = \frac{32 \cdot 4}{2\pi} = 20,371 \text{ Zoll, und}$$

$$r = \frac{nt}{2\pi} = \frac{7 \cdot 4}{2\pi} = 4,456 \text{ Zoll.}$$

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 353

Ferner ist §. 250. (VII)

$$\beta = \frac{360}{n} = \frac{360}{7} = 51^\circ 26' \text{ also } \frac{1}{2} \beta = 25^\circ 43', \text{ und}$$

$\sin \frac{1}{2} \beta = 0,4339$ . Wird nun  $d = 1$  gesetzt, so ist

$$2r \sin \frac{1}{2} \beta - d = 2,8669 \text{ und } 2,8669^2 = 8,2191;$$

man findet daher die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns, oder

$$l = -20,371 + \sqrt{473,879} = 1,398 \text{ oder beinahe } 1\frac{3}{4} \text{ Zoll.}$$

§. 252.

**Aufgabe.** Aus der gegebenen Theilung und der Anzahl der Zähne und Stöcke beim Rade und Getriebe, die Zähne und Stöcke anzuordnen und eine Lehre (Schablone) für die Zähne zu verfertigen.

**Auflösung.** Die Theilung sey  $= t$ , die Zahl der Zähne  $= m$ , und die Anzahl der Stöcke  $= n$ , so findet man hieraus nach §. 250. (I) den Halbmesser des Rades  $a = \frac{m t}{2\pi}$  und den Halbmesser des Getriebes  $r = \frac{n t}{2\pi}$ . Weil die Stöcke sich mehr als die

Zähne abnußen, und auch länger als diese sind, so macht man sie gewöhnlich dicker als die Zähne. Ein Spielraum zwischen beiden wäre unnöthig, wenn alles im höchsten Grade vollkommen gearbeitet werden könnte.

Giebt man dem Spielraume  $cd$ , Figur 123., den Taf. V.  
Fig. 123. acht und vierzigsten Theil der Theilung, so wird dies in den meisten Fällen zureichen; alsdann ist  $cd = \frac{1}{48} t$ . Soll nun die Dicke des Stocks der Hälfte der Theilung gleich seyn, so ist, wenn  $d$  den Halbmesser des Stocks bezeichnet,  $2d = \frac{1}{2} t$ . Zieht man nun von der ganzen Theilung  $t$ , die Dicke des Stocks  $\frac{1}{2} t$  und den

Spielraum  $\frac{1}{8} t$  ab, so bleibt  $\frac{3}{8} t$  für die Breite des Zahns auf dem Theilkreise des Rades übrig. Wäre z. B. die Theilung  $t = 4$  Zoll, so ist

die Dicke des Stocks  $ac = \frac{1}{2} t = 2$  Zoll,

der Spielraum  $cd = \frac{1}{8} t = \frac{1}{2}$  Zoll,

die Breite des Zahns  $bd = \frac{3}{8} t = 1\frac{1}{2}$  Zoll.

Zaf. V.  
Fig. 124. Um nun die Lehre zu verfertigen, wonach sämtliche Zähne bearbeitet werden können, ziehe man auf einem ebenen Brette eine Linie CG, Figur 124., trage von C bis A den Halbmesser des Rades, und von A bis G den Halbmesser des Getriebes. Aus C und G schlage man die Bogen AX und AW, nehme den Bogen  $AO = A3 =$  der Theilung (hier 4 Zoll); ziehe die Sehne AO, und nehme Oo der halben Dicke des Stocks gleich, so wird ein Bogen on, welcher aus C geschlagen wird, die Länge des Zahns begrenzen (§. 249.). Nun theile man den Bogen AO in mehrere gleiche Theile A $\alpha$ ,  $\alpha\beta$ ,  $\beta O$ , und in eben so viel gleiche Theile A, 1; 1, 2; 2, 3; werde A 3 getheilt (hier sind der Deutlichkeit wegen nur drei Theile angenommen, ob gleich eine größere Anzahl besser ist), alsdann schlage man aus C durch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Bogen  $a a'$ ,  $b b'$ ,  $c c'$ , und aus C ziehe man die Linien 1  $a'$ , 2  $b'$ , 3  $c'$ ; nehme  $a a' = a' a$ ,  $b \beta = b' \beta$ ,  $c \gamma = c' \gamma$ ; so liegen die Punkte A,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  in einer Epicycloide (§. 15. Anhang), und man kann die Epicycloide A  $\beta' \gamma'$  desto genauer zeichnen, je mehr dergleichen Punkte gefunden sind. Nun nehme man die halbe Dicke des Stocks in den Zirkel, und schlage aus A und aus

mehrern Punkten der Linie  $Ay'$  Kreisbogen, und ziehe durch die äußersten Enden derselben die krumme Linie  $Be$  bis an den Bogen  $on$ , so ist  $Be$  die Krümmung des Zahns über dem Theilkreise  $AX$ . Von  $B$  nach  $E$  und von  $E$  nach  $D$  setze man die halbe Dicke des Zahns, ziehe durch  $C$  und  $E$  die Linie  $CF$ , so ist  $EF$  die Aze vom Obertheile des Zahns. Macht man nun den Theil  $EDFE$  der andern Hälfte  $EBFE$  des Zahns gleich, und giebt demselben bei  $F$  eine geringe willkürliche Wölbung, so ist der Obertheil  $BFD$  des Zahns fertig.

Um den Untertheil zu bilden, nehme man  $EH$  etwas größer, als die halbe Dicke der Stöcke, ziehe durch  $H$  aus  $C$  den Bogen  $IK$ , und aus  $B$  und  $D$  nach  $C$  die Linien  $BI$ ,  $DK$ , so ist  $BDKI$  der Untertheil des Zahns, und der Fuß  $IK$  desselben fällt mit der Stirne von dem Radekranze zusammen.

Mit Hülfe dieser Lehre  $IBFDK$  lassen sich nun sämtliche Zähne des Stirnrades verfertigen.

§. 253.

Es kann sich der Fall ereignen, daß der Durchschnittpunkt der Bogen  $Be$  und  $Dg$ , Figur 124., unterhalb des Bogens  $on$  fällt. Alsdann muß bei ungedänderten Halbmessern  $a$  und  $r$  entweder die Dicke  $BD$  des Zahns vergrößert, oder die Theilung  $OA = A3$  verkleinert werden, weil sonst der vorhergehende Zahn seinen Stock früher verläßt, ehe der folgende Zahn seinen Stock ergriffen hat, wodurch nachtheilige Erschütterungen des Räderwerks entstehen müssen. Bei übr-

Taf. v.  
Fig. 124.

gens gleichen Umständen kann man auch durch Vergrößerung des Halbmessers vom Getriebe und Rade, für den Zahn die erforderliche Länge erhalten.

Wollte man mit weniger Weitläufigkeit und doch noch erträglich genau eine Lehre zum Zahn verfertigen, so kann man folgendergestalt verfahren. Auf dem Theilkreise des Getriebes trage man die Theilung von A nach L, ziehe AL und nehme für Lu die halbe Dicke des Stocks. Ferner sey auf dem Theilkreise des Rades AM die halbe Dicke des Stocks, MN der Spielraum, und  $NP = PQ$  die halbe Breite des Zahns. Durch u schlage man aus C den Bogen un, und durch C und P ziehe man SR. Ferner sey  $Rv = Ru$ ; alsdann werde aus u und Q mit der Weite u A der Durchschnittspunkt x, und mit eben dieser Weite aus v und N der Durchschnittspunkt y gesucht, so daß aus x der Bogen uQ, und aus y der Bogen vN geschlagen werde, so erhält man hiedurch den Obertheil QuvN des Zahns. Der Untertheil wird eben so wie im vorigen §. bestimmt.

§. 254.

**Aufgabe.** Die Kraft zu bestimmen, welche am Theilkreise des Rades oder Getriebes angebracht werden muß, um die Reibung zwischen Zahn und Stock zu überwältigen.

**Auflösung.** Mit Beibehaltung der Bezeichnung Taf. v. §. 250. sey P die Kraft, welche, Figur 122., am Um-  
Fig. 122. fange BAX des Rades erfordert wird, um dem Gegendruck vom Getriebe das Gleichgewicht zu halten, so

entsteht hieraus (§. 247.) nach der Richtung OH gegen den Stoß O ein Normaldruck  $= \frac{P}{\sin OAG}$ . Für  $OGA = \beta$  ist aber  $OAG = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ , also  $\sin OAG = \cos \frac{1}{2}\beta$ , daher ist der Normaldruck  $= \frac{P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$ , und die davon herrührende Reibung, welche nach der auf AO winkelrechten Richtung OL' der Bewegung widersteht

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$$

oder am Zahne BB' muß in O nach OL eine Kraft  $\frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$  angebracht werden, um die Reibung zu überwinden. Diese Kraft zerlege man nach ON auf den festen Punkt C und nach OM, winkelrecht auf OC, so wird die Kraft nach ON durch den Zapfen C des Rades aufgehoben, die nach OM erforderliche Kraft ist aber

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cdot \cos LOM.$$

Nun ist der Winkel  $LOM = AOC$ , weil der Winkel  $LON$  jeden zu einem rechten Winkel ergänzt, daher erhält man, weil  $AOL' = 90^\circ$  ist,

$$COL' = AOC + 90^\circ = LOM + 90^\circ, \text{ also}$$

$$\sin COL' = \sin (LOM + 90^\circ) = \cos LOM.$$

Ferner ist  $OL'C = \frac{1}{2}OGA = \frac{1}{2}\beta$ , und es verhält sich

$$CO : CE' = \sin OL'C : \sin COL' \text{ oder}$$

$$CO : a + 2r = \sin \frac{1}{2}\beta : \cos LOM, \text{ also ist}$$

$$\cos LOM = \frac{(a + 2r) \sin \frac{1}{2}\beta}{CO}$$



folglich die nach  $OM$  erforderliche Kraft

$$\frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2} \beta} \cdot \cos LOM = \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2} \beta}{CO} \cdot P$$

oder es müssen, wenn am Umfange des Theilkreises in  $D$  oder  $A$  eine Kraft  $f$  eben die Wirkung hervorbringen soll, die Momente beider Kräfte einander gleich seyn, also

$$a \cdot f = CO \cdot \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2} \beta}{CO} \cdot P$$

und hieraus findet man die am Theilrisse erforderliche Kraft zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Zahn und Stock, oder

$$(I) \quad f = \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2} \beta}{a} P.$$

Bei einerlei Räderwert ist daher die Reibung veränderlich, und wächst mit dem Winkel  $\beta = AGO$ . Fällt die Berührung zwischen Zahn und Stock in die Mittelpunktslinie  $CG$  bei  $A$ , so ist die Reibung  $= 0$ , und sie wird da am größten, wo der Zahn den Stock verläßt. Der Sicherheit wegen bringt man den größten Werth, welchen der Winkel  $\beta$  erhalten kann, zur Bestimmung der Reibung in Rechnung, also wird  $\beta$  der Winkel, welcher der Theilung am Getriebe entspricht. Dies giebt §. 250. VII.  $\frac{1}{2} \beta = \frac{180^\circ}{n}$ , wo  $n$  die Anzahl der Stöcke des Getriebes vorstellt, daher ist auch

$$(II) \quad f = \frac{\mu (a + 2r)}{a} P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}.$$

Die Reibung zwischen Zahn und Stock wird daher unter übrigens gleichen Umständen desto grö-

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 359

er, je kleiner der Halbmesser des Rades, je größer der Halbmesser des Getriebes, oder je kleiner die Anzahl der Stöcke ist.

Für  $n = 6$  wird  $\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = 0,57735$

$n = 7 \quad - \quad - \quad - = 0,48137$

$n = 8 \quad - \quad - \quad - = 0,41421$

$n = 9 \quad - \quad - \quad - = 0,36397$

$n = 10 \quad - \quad - \quad - = 0,32492$

$n = 20 \quad - \quad - \quad - = 0,15838$

$n = 30 \quad - \quad - \quad - = 0,10510$

Weil  $f = \mu \left(1 + \frac{2r}{a}\right) P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}$ , und §. 250. [VI]

$\frac{r}{a} = \frac{n}{m}$  ist, so erhält man auch

$$(III) \quad f = \mu \frac{(m + 2n)}{m} P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}$$

so daß die Reibung lediglich durch die Anzahl der Zähne und Stöcke bestimmt wird.

Die gesammte Kraft, welche am Theilkreise des Rades zur Erhaltung des Gleichgewichts und zur Ueberwältigung der Reibung erfordert wird, sey  $V$ , so ist

$$V = P + f$$

wo  $f$  nach den verschiedenen Umständen bestimmt werden kann.

Beispiel. Ein Rad habe 52 Zähne, das zugehörige Getriebe 6 Stöcke, und es widerstehe der Bewegung mit einer Kraft von 100 Pfund, so ist hier  $m = 52$ ,  $n = 6$ ,  $\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tgt} 30^\circ$ ;  $P = 100$  Pfund, und wenn man  $\mu = \frac{1}{3}$  setzt, so findet man die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft

$$f = \frac{52 + 13}{3 \cdot 52} \cdot 0,57735 \cdot 100 = 23,68 \text{ Pfund.}$$

Für  $\mu = \frac{1}{2}$  wird  $f = 11,84$  Pfund.

Für  $n = 8$ ,  $m = 52$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$  und  $P = 100$  wird

$$f = \frac{52 + 16}{6 \cdot 52} \cdot 0,41421 \cdot 100 = 9,03 \text{ Pfund.}$$

Belidor (Archit. Hydraul. 1. B. 2. R. §. 288.) nimmt im Durchschnitt  $f = \frac{1}{18} P$ .

### §. 255.

Will man zu Vermeidung der Tangente im Ausdruck für  $f$  statt derselben einen Näherungswerth annehmen, so ist  $\text{Arc } \frac{180^\circ}{n} = \frac{\pi}{n}$ , und weil (§. 157. Anhang) nahe genug  $\text{tgt } \varphi = \frac{3\pi\varphi}{\pi^2 - 4\varphi^2}$  ist, so erhält man

$$\text{tgt } \frac{180^\circ}{n} = \text{tgt } \frac{\pi}{n} = \frac{3\pi \frac{\pi}{n}}{\pi^2 - 4 \frac{\pi^2}{n^2}} = \frac{3n}{n^2 - 4}$$

Diesen Werth in die Gleichung §. 254. III. gesetzt, giebt für die Reibung zwischen Zahn und Stoß die am Theilriß erforderliche Kraft

$$f = \frac{3\mu n (m + 2n)}{m (n^2 - 4)} P.$$

Nach dem Beispiele des vorigen §. erhält man hier für  $n = 6$ ,  $m = 52$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$  und  $P = 100$

$$f = 23,07$$

und für  $\mu = \frac{1}{2}$  ist  $f = 11,53$ , welches hinlänglich genau ist.

### §. 256.

Aufgabe. Ein Getriebe oder Kumpf wird vom Stirnrade umgetrieben, man soll die vortheilhafteste

Gestalt der Stäbe und Zähne für beide Räder angeben.

**Auflösung.** Der Halbmesser des Rades sey  $AC$ , Figur 125., und des Getriebes oder Kumpfes  $AG$ ; Taf. VI. beide liegen in der Mittelpunktslinie  $CG$ , und im Berührungspunkte  $A$  treffe der Theilkreis  $XZ$  des Rades mit dem Theilkreise  $VW$  des Getriebes zusammen. Fig. 125. Auf dem Umfange  $XZ$  als Grundkreis beschreibe der Kreis  $AOGA$ , dessen Durchmesser  $AG$  dem Halbmesser des Getriebes gleich ist, eine Epicycloide  $AM$ , und  $AG$  sey ein fester unbiegsamer Halbmesser des Getriebes oder Kumpfs, dessen Zahn oder Stab derselbe vorstellt. Wird nun der Bogen  $AM$  als Zahn des Rades mit dem Umfange  $XZ$  desselben genau verbunden, und man bewegt das Rad von  $A$  nach  $B$ , so kommt der Zahn  $AM$  in die Lage  $BD$  und der Stab  $AI$  wird von dem Zahne bis in irgend eine Lage  $KL'$  fortgeschoben. Durch den Punkt  $O$ , wo die Epicycloide  $BD$  den erzeugenden Kreis  $AOG$  schneidet, ziehe man die Sehne  $AO$ , so ist solche eine Normale der Epicycloide in  $O$ . Es ist aber der Winkel  $AOG$  im Halbkreise ein rechter, daher  $OG$  auf  $OA$  winkelrecht, folglich  $OG$  eine Tangente, welche den Bogen  $BD$  in  $O$  berührt, daher muß auch der Stab  $KL$ , welcher mit dieser Tangente zusammenfällt, den Zahn  $BD$  in  $O$  berühren.

Nach §. 13. des Anhanges ist alsdann der Bogen  $AO = AB$ , und weil man die grade Linie  $AG$  als eine Hypocycloide ansehen kann, deren Grundkreis

der Bogen  $V A W$  und deren Erzeugungskreis  $A O G$  ist, so muß nach §. 27. des Anhanges, der Bogen  $A O$  dem Bogen  $A K$  gleich seyn. Aber  $A O = A B$ , daher ist der

$$\text{Bogen } A B = \text{Bogen } A K.$$

Nun ist  $A B$  der Weg welchen der Umfang  $X Z$  des Rades, und  $A K$  der Weg welchen der Umfang  $V W$  des Getriebes durchlaufen hat, wenn der Zahn von  $A$  nach  $B$  fortgerückt ist, daher sind gleich große Theile von den Umfängen des Rades und Getriebes fortgeschoben, und hiedurch die erste Forderung §. 246. erfüllt.

Eben so wie §. 247. läßt sich beweisen, daß, wenn  $P$  die Kraft am Umfange  $X Z$  des Rades und  $Q$  der Widerstand am Umfange  $V W$  des Getriebes ist, alsdann für jeden Angriffspunkt  $O$  zwischen Zahn und Stab,  $P = Q$  bleibt, weil man in Absicht des Punktes  $O$  nur eben so wie §. 247., Figur 122., verfahren darf. Es ist daher auch der zweiten Forderung, §. 246., genügt, und es folgt hieraus, daß wenn ein Rad mit Zähnen ein Getriebe mit Stäben umtreiben soll, so müssen die Zähne des Rades nach einer Epicycloide gebildet werden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Getriebes zum Durchmesser, und den Umfang des Rades zum Grundkreise hat. Die Stäbe des Getriebes werden, so weit sie in Berührung mit den Zähnen kommen, geradlinigt, so daß diese Berührungslinie verlängert durch den Mittelpunkt des Getriebes geht.

Kaf. V.  
Fig. 122.

§. 257.

Es sey die Theilung  $AK$ , Figur 125., des Ge- Taf. VI.  
triebes, der Theilung  $AB$  des Rades gleich, und der Fig. 125.  
Zahn  $AM$  falle im Berührungspunkte  $A$  der Mittel-  
punktlinie mit dem Stabe  $AI$  zusammen, so wird der  
vorhergehende Zahn  $BD$  den Stab  $KL'$  in  $O$  berüh-  
ren. Soll nun, damit die Zähne nicht unnöthig groß  
werden, jedesmal nur ein Zahn einen Stab fortschie-  
ben, so kann die Länge des Zahns  $BD$  um den Theil  
 $OD$  verkürzt werden, weil in dem Augenblicke, wo der  
Punkt  $O$  des Zahns  $BD$ , mit  $KL'$  zusammen fällt,  
ein nachfolgender Zahn  $AM$  den Stab  $AI$  im Punkte  
 $A$  trifft. Man kann daher sämtliche Zähne aus dem  
Mittelpunkte  $C$  mit der Weite  $CO$  wie bei  $OO'$  ab-  
schneiden, und wenn die Breite  $BE$  der Zähne gege-  
ben ist, durch die Mitte von  $BE$  in  $H$ , den Halbmes-  
ser  $CH$  bis an den Bogen  $OO'$  verlängern, und um  
einen symmetrischen Zahn zu erhalten, den Bogen  $EO'$   
dem Bogen  $BO$  gleich und ähnlich machen. Zu Ver-  
meidung der scharfen Ecken bei  $O, O'$  giebt man  
dem Zahn eine etwas größere Länge, mittelst einer  
Wölbung, welche die Bogen  $BO, EO'$  in  $O, O'$  be-  
rührt.

Nach Abzug des Spielraums  $EF$  bleibt für die  
Breite der Stäbe, die Weite  $AF$  übrig. Damit aber  
die Ecken  $A, K$  der Stäbe nicht in die Oberfläche der  
Zähne einschneiden oder stumpf werden, kann man ih-  
ren Kopf nach einem Halbkreise abrunden, wie bei  $R$   
und  $W$ , nur muß alsdann auch der Raum  $NQQ'$

zwischen zweien Zähnen so weit ausgetieft werden, daß die Stäbe freies Spiel behalten.

Die kleinste Breite, welche ein symmetrischer Zahn erhalten kann, zu finden, wenn, Figur 126.,  $AB = AK$  Taf. VI. die Theilung des Rades und Getriebes ist, ziehe man Fig. 126. vom Punkt O, wo der erzeugende Kreis den Stab KG schneidet, den Halbmesser OC, welcher den Theilkreis des Rades in H trifft. Nun werde  $HB = HE$  genommen, so ist BE die kleinste Breite des Zahns, und nur der übrige Bogen EA kann zur Breite des Stabes verwandt werden. Wäre bei unveränderten Halbmessern, Figur 126.,  $AB' = AK'$  die Theilung, also  $H'B'$  die halbe Breite des Zahns, so wird die andere Hälfte des symmetrischen Zahns von  $H'$  nach  $E'$ , also über A hinaus fallen, und dadurch die freie Bewegung des Stabes AG verhindern. Es kann daher in dergleichen Fällen kein symmetrischer Zahn statt finden, und man muß demselben, wenn die Theilung nicht kleiner ausfallen kann, etwa die Gestalt  $B'O'E$  geben, damit der Stab AG noch die erforderliche Breite erhalten kann. Der Bogen  $B'O'$  ist alsdann eine durch den Kreis AOG auf XZ erzeugte Epicykloide und  $O'E$  eine willkürliche Abrundung.

Die Beschreibung des Bogens der Epicykloide geschieht nach §. 15. des Anhanges, so daß für jeden besondern Fall, das Räderwerk leicht eingerichtet werden kann.

§. 258.

Aufgabe. Die kleinste Länge vom Obertheile

des Zahns eines Stirnrades zu finden, welches die Stäbe eines Kumpfs oder Getriebes bewegen soll, wenn, Figur 125., der Halbmesser des Rades  $AC = a$ , Taf. VI. Fig. 125.  
des Getriebes  $AG = r$ , und der Winkel  $AGO = \beta$ , welcher am Mittelpunkt des Getriebes zur Theilung  $AO$  gehört, gegeben ist.

**Auflösung.** Man ziehe den Halbmesser  $OC$ , und es sey die kleinste Länge des Zahns  $Oh = l$ . Im rechtwinklichten Dreieck  $AGO$  erhält man die Seite

$$AO = r \sin \beta.$$

Ferner ist der Winkel  $CAO = AOG + AGO = 90^\circ + \beta$   
also  $\cos CAO = \cos (90^\circ + \beta) = -\sin \beta$

Im Dreieck  $ACO$  ist

$$CO^2 = AC^2 + AO^2 - 2 \cdot AC \cdot AO \cos CAO \text{ oder}$$

$$(a + l)^2 = a^2 + r^2 \sin^2 \beta + 2ar \sin \beta$$

und hieraus erhält man die gesuchte kleinste Länge des Zahns oder

$$l = -a + \sqrt{[a^2 + r(2a + r) \sin \beta^2]}.$$

§. 259.

**Aufgabe.** Ein Stirnrad wird vom Getriebe oder Kumpf umgetrieben, man soll die vortheilhafteste Gestalt der Zähne und Stäbe angeben.

**Auflösung.** Macht man die Anordnung nach §. 256., so sind die Bedingungen §. 246. erfüllt, allein wenn, Figur 125., die Stäbe des Getriebes, die Zähne des Rades nach der Richtung  $ZX$  forttreiben, so wird in dem Augenblick, wo der Stab  $KL'$  den Zahn  $BO$  in  $O$  berührt, der Zahn  $AM$  in  $A$  den



Kaf. VI.  
Fig. 127.

Stab  $AI$  verlassen, und überhaupt die Berührung zwischen Stab und Zahn nur vor der Mittelpunktslinie  $CG$  geschehen, hinter derselben nach  $X$ ,  $W$  hin, wird hingegen keine Berührung vorkommen. Dieses hat nun den Nachtheil, daß die Stäbe wie  $KL'$ , welche vor  $CG$  die Zähne fortschieben, auf dem Zahn  $OB$  eine Bewegung von  $O$  nach  $B$  gegen den Span (der Richtung der Späne oder Fasern des hölzernen Zahns entgegen) verursachen, wodurch die Reibung ansehnlich vermehrt, und Zahn und Stab sehr stark abgenutzt werden. Um dies zu vermeiden kommt es darauf an, daß die Stäbe die Zähne des Rades nicht eher als im Punkt  $A$  und hinter der Mittelpunktslinie  $CG$  berühren, welches man leicht dadurch erhalten kann, wenn man die Anordnung, Figur 125. §. 256., umkehrt, und nunmehr die Stäbe nach einer Epicycloide, die Zähne aber nach geraden Linien bildet, welche verlängert nach dem Mittelpunkt des Rades gehen. Es sey, Figur 127.,  $AC$  der Halbmesser des Rades,  $AG$  der Halbmesser des Getriebes,  $CG$  die Mittelpunktslinie, und das Getriebe bewege das Rad von  $A$  nach  $X$ . Auf beiden Theilkreisen werde von  $A$  nach  $B$  und von  $A$  nach  $K$  die Theilung der Zähne  $AB = AK$  abgesetzt, und auf  $AW$  als Grundkreis, mit dem Erzeugungstreise  $AKC$ , dessen Durchmesser  $AC$  dem Halbmesser des Rades gleich ist, die Epicycloide  $BD$  beschrieben, so muß der Halbmesser  $CK$  diese Kurve in  $P$ , wo sie den Erzeugungskreis schneidet, berühren (§. 17. Anhang). Die halbe Breite

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 367

vom Zahne des Getriebes werde von B nach H und von H nach E gesetzt, durch H der Halbmesser G D gezogen, und der Bogen ED dem Bogen BD gleich und ähnlich gemacht, so entsteht der Obertheil des symmetrischen Getriebzahns, welcher mit dem Halbmesser G P bei P p abgerundet und daselbst mit einer Wölbung versehen werden kann, weil in dem Augenblicke, wo der Getriebzahn BE' den Radzahn K L im Punkte P berührt, ein anderer Getriebzahn M mit dem Radzahn A im Berührungspunkte der Mittelpunktslinie zusammenfällt. Die Zähne des Rades werden auf beiden Seiten nach graden Linien gebildet, welche wie K L verlängert in den Mittelpunkt C des Rades treffen. Den Obertheil der Radzähne, so weit er über den Theilkreis X Z fällt, kann man nach einer flachen Wölbung, welche beide Seiten des Zahns berührt, abrunden. Damit also, wenn ein Rad durch ein Getriebe bewegt werden soll, die Zähne nicht gegen den Span arbeiten, so müssen die Getriebzähne nach einer Epicycloide gebildet werden, deren Grundkreis der Theilkreis des Getriebes ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Rades zum Durchmesser hat. Die Radzähne werden nach graden Linien gearbeitet, welche im Mittelpunkt C des Rades zusammenfallen.

§. 260.

Aufgabe. Die kleinste Länge vom Obertheile des Stabes eines Kumpfs oder Getriebes zu finden, welcher die Zähne eines Stirnrades bewegen soll, wenn

**Zaf. VI.** Figur 127., der Halbmesser des Rades  $AC = a$ , des  
**Fig. 127.** Getriebes  $AG = r$  und der Winkel  $ACP = \alpha$ ,  
 welcher am Mittelpunkte des Rades zur Theilung  $AP$   
 gehört, gegeben sind.

**Auflösung.** Die kleinste Länge des Stabes sey  
 $hP = l'$ , so ist im Dreieck  $AGP$

$$GP^2 = AG^2 + AP^2 - 2 \cdot AG \cdot AP \cdot \cos GAP.$$

Aber im rechtwinklichten Dreieck  $ACP$  ist  $AP = a \sin \alpha$   
 und weil der Winkel  $GAP = 90^\circ + \alpha$  ist, so er-  
 hält man  $\cos GAP = -\sin \alpha$ , daher

$$GP^2 = (r + l')^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \alpha + 2arsin\alpha^2$$

und hieraus die kleinste Länge des Stabes

$$l' = -r + \sqrt{r^2 + a(a + 2r)\sin^2 \alpha}.$$

§. 261.

**Aufgabe.** Die Kraft zu finden, welche am  
 Theilkreise eines Rades erfordert wird, um die Reibung  
 zwischen den Zähnen zweier Räder zu überwältigen.

**Auflösung.** Mit Beibehaltung der angenom-  
**Zaf. VI.** menen Bezeichnung sey  $P$  die Kraft, welche, Figur  
**Fig. 125.** 125., am Theilkreise  $XAZ$  des Rades erfordert wird,  
 um der eben so großen Last am Theilkreise  $VAW$   
 des zweiten Rades das Gleichgewicht zu halten. Die  
 Kraft  $P$  zerlegt sich nach  $AC$  auf den festen Punkt  
 $C$ , und nach  $AO$  in den Normaldruck  $P'$  auf den Zahn  
 $L'K$ , und man findet den Normaldruck

$$P' = \frac{P}{\cos OAP} = \frac{P}{\cos OGA} = \frac{P}{\cos \beta}.$$

Von diesem Normaldrucke entsteht eine Reibung  $\frac{\mu P}{\cos \beta}$   
 und man muß nach der Richtung  $OL$  eine Kraft  $\frac{\mu P}{\cos \beta}$

anbringen, um diese Reibung zu überwältigen. Zerlegt man diese Kraft nach  $ON'$  und  $OM'$  winkeltrecht auf  $OC$ , so wird die nach  $ON'$  von dem festen Punkt  $C$  aufgehoben. Die Kraft nach  $OM'$  ist aber

$$= \frac{\mu P}{\cos \beta} \cdot \cos LOM' = \frac{\mu P}{\cos \beta} \cos AOC.$$

Nun ist  $\sin COG = \sin (90^\circ + AOC) = \cos AOC$  und im Dreieck  $COG$  verhält sich

$$OC : CG = \sin OGC : \sin COG \text{ oder}$$

$$OC : a + r = \sin \beta : \cos AOC, \text{ daher}$$

$$\cos AOC = \frac{(a + r) \sin \beta}{OC}$$

und man findet die zur Ueberwältigung der Reibung nach der Richtung  $OM'$  erforderliche Kraft

$$\frac{\mu P}{\cos \beta} \cos AOC = \frac{\mu (a + r) \operatorname{tg} \beta}{OC} \cdot P.$$

Soll am Theilkreise in  $h$  oder  $A$  eine Kraft  $f$  eben die Wirkung hervorbringen, so ist das Moment

$$a \cdot f = OC \cdot \frac{\mu (a + r) \operatorname{tg} \beta}{OC} \cdot P$$

und man findet hieraus die am Theilkreise zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Zähnen erforderliche Kraft,

$$(I) \quad f = \frac{\mu (a + r) \operatorname{tg} \beta}{a} \cdot P.$$

Diese Kraft ist veränderlich, und wächst mit dem Winkel  $\beta = OGA$ . Der größte Werth, welchen  $\beta$  erhalten kann, ist der Winkel, welcher der Theilung am zweiten Rade entspricht. Giebt man daher  $\beta$  diese Bedeutung, so wird auf keinen Fall die Reibung zu klein in Rechnung gebracht.

Uebrigens wird hier unter dem ersten Rade dasjenige verstanden, welches das andere umtreibt. Für das erste Rad ist  $a$ , und für das zweite  $r$  der Halbmesser des Theilkreises, und  $\beta$  ist der Winkel, welcher am Mittelpunkte des zweiten Rades der Theilung entspricht.

Wäre  $m$  die Anzahl der Zähne des ersten, und  $n$  die Anzahl der Zähne des zweiten Rades, so ist  $\beta = \frac{360^\circ}{n}$ , daher

$$(II) \quad f = \frac{\mu (a + r)}{a} P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n}.$$

Ferner ist §. 250. [VI]  $\frac{r}{a} = \frac{n}{m}$ , daher

$$(III) \quad f = \frac{\mu (m + n)}{m} P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n}.$$

Will man sich mit einem zureichenden Näherungsausdruck begnügen, um die trigonometrische Linie zu vermeiden, so kann man (§. 157. Anhang)

$\operatorname{tgt} x = \frac{3\pi x}{x^2 - 4x^2}$ , setzen. Nun ist  $\operatorname{Arc} \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ , also

$$\operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n} = \operatorname{tgt} \frac{2\pi}{n} = \frac{3\pi \frac{2\pi}{n}}{x^2 - 4 \cdot \frac{4\pi^2}{n^2}} = \frac{6\pi}{n^2 - 16}$$

und hieraus

$$(IV) \quad f = \frac{6\mu n (m + n)}{m (n^2 - 16)} P.$$

Wird  $V$  in der Bedeutung §. 254. genommen, so ist die gesammte Kraft, welche am Theilkreise zur Erhaltung des Gleichgewichts und zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Zähnen erfordert wird, oder

$$V = P + f.$$

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 371

**Beispiel.** Das erste Rad habe 52, das zweite 6 Zähne, und widerstehe der Bewegung mit einer Kraft von 100 Pfund, so ist hier  $m = 52$ ,  $n = 6$ ,  $P = 100$ ; also  $\operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n} = \operatorname{tgt} 60^\circ = 1,73205$ , daher ist, wenn  $\mu = \frac{2}{8}$  angenommen wird, die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft nach (III)

$$f = \frac{(52 + 6) \cdot 100 \cdot 1,73205}{6 \cdot 52} = 32,20 \text{ Pfund.}$$

Wird dieß Beispiel nach (IV) berechnet, so findet man  $f = 33,46$ .

§. 262.

**Zusatz.** Zwischen Zahn und Stock war die Reibung §. 255., oder

$$f = \frac{3\mu n (m + 2n)}{m (n^2 - 4)} P.$$

Wird die Reibung zwischen Zahn und Zahn nach dem vorigen §.  $= f'$  gesetzt, so läßt sich leicht einsehen, daß, wenn  $m$  und  $n$  in  $f$  und  $f'$  gleichen Werth haben, alsdann  $f'$  größer als  $f$  ist, oder unter übrigens gleichen Umständen ist die Reibung zwischen Zahn und Zahn größer, als zwischen Zahn und Stock.

§. 263.

Bei den bisherigen Untersuchungen hat jederzeit die stillschweigende Bedingung statt gefunden, daß wenn die Zähne des Rades und Getriebes einander in der Mittelpunktslinie bei A, Figur 125. und 127., berühren, auch bei den nächst vorhergehenden Zähnen bei O, Figur 125., oder P, Figur 127., eine Berührung ausführbar sey. Aber §. 259. ist der Fall erläutert, in welchem bei einer gegebenen Theilung  $AB' = AK'$ ,

Taf. VI.  
Fig. 125.  
127.

**Taf. VI.** Figur 126., die zweite Berührung in  $O'$  fällt, weshalb der Zahn die Gestalt  $B'O'E$  erhalten müßte, und daher nicht symmetrisch werden kann. Diese unformlichen Zähne gewähren zwar den Vortheil, daß keine Reibung gegen den Span entsteht, weil aber auch diese unter gewissen Umständen kaum ausführbar sind, und besonders in denjenigen Fällen, wo symmetrische Zähne von gegebener Breite angeordnet werden sollen, ihre Länge sehr oft größer ausfällt, als solches die bisherige Anleitung erfordert, so kommt es nicht nur darauf an, diejenigen Fälle anzugeben, bei welchen eine Bewegung gegen den Span entsteht, sondern auch die Nachtheile dieser Bewegung so viel wie möglich zu vermindern.

**Taf. VI.** Es sey daher, Figur 128., der Halbmesser des Rades  $AC$ , des Getriebes  $AG$ , und die Theilung  $AB = AK$  gegeben, und dabei vorausgesetzt, daß das Getriebe vom Rade bewegt werden soll. Mit dem Erzeugungskreise, dessen Durchmesser  $AG$  ist, sey auf dem Theilkreise  $XZ$  des Rades als Grundkreis, die Epicycloide  $BDO'$  beschrieben, welche den Halbmesser  $GK$  in  $O'$  berührt, so wäre  $BDO'$  die erforderliche Gestalt des Zahns, wenn derselbe den Stab  $KO'$  in dem Augenblicke verlassen soll, wo ein neuer Zahn  $AN$  den Stab  $AI$  erreicht. Die unformliche Gestalt  $BDO'$  ist schon deshalb nicht ausführbar, weil alsdann den Zähnen des Getriebes die nöthige Breite fehlte. Wird aber überdies verlangt, daß die Zähne beider Räder symmetrisch seyn sollen, und die Breite des Radezahns

BE ist gegeben, so ziehe man durch C und die Mitte von BE die Linie HD, welche die Epicycloide BO in D schneidet, so ist BD die eine Hälfte vom Obertheile des symmetrischen Zahns, welcher die andere Hälfte DE gleich und ähnlich gemacht wird. Mit dem Halbmesser CD beschreibe man den Bogen DO bis an den Erzeugungskreis AG, so ist O der Punkt, wo der Kopf des Zahns BDE den zugehörigen Stab bei der Bewegung des Rades verlassen muß (§. 249.). Hat in diesem Falle der Punkt B des Zahns BE von der Mittelpunktslinie ab, den Bogen AB, Figur 129., durchlaufen, so wird erfordert, daß in eben dem Augenblicke der nachfolgende Zahn PN mit dem Stabe AI vor der Mittelpunktslinie CG in Berührung kommt. Damit aber alsdann die Bedingungen §. 246. erfüllt werden, so müssen die Obertheile der Stäbe die Gestalt einer Epicycloide erhalten, deren Grundkreis der Umfang VW des Getriebes ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser AC des Rades zum Durchmesser hat. (§. 259.)

Taf. VI.  
Fig. 129.

Dies wird daher allemal der Fall seyn, wenn die Berührung der Zähne vor die Mittelpunktslinie fällt.

§. 264.

**Aufgabe.** Die vortheilhafteste Anordnung der Zähne anzugeben, wenn ein Getriebe durch ein Stirnrad bewegt wird, und wenn außerdem die Halbmesser der Räder, die Theilung und die Breiten der Zähne gegeben sind, auch die erste Berührung der Zähne nicht



in der Mittelpunktslinie, sondern vor derselben erfolgen soll.

Kap. VI.

Fig. 129.

**Auflösung.** Es sey  $CG$ , Figur 129., die Mittelpunktslinie. Auf dem Theilkreise  $XZ$  als Grundkreis beschreibe man in einem willkürlichen Punkte  $b$  eine Epicycloide  $bd$ , deren Erzeugungskreis den Halbmesser  $AG$  des Getriebes zum Durchmesser hat. Die gegebene halbe Dicke des Zahns werde von  $b$  nach  $h$ , und von  $h$  nach  $e$  gesetzt, durch  $C$  und  $h$  die Linie  $hd$  bis an die Epicycloide gezogen, so ist  $hd$  die größte Länge vom Obertheile des Zahns, dessen Gestalt man erhält, wenn der Bogen  $ed$  dem Bogen  $bd$  gleich und ähnlich gemacht wird. Mit dem Halbmesser  $Cd$  beschreibe man den Bogen  $dO$  bis an den Erzeugungskreis  $AG$ , ziehe  $OC$ , und setze von  $H$  nach  $B$  die halbe Breite des Zahns.

Ferner werde auf dem Theilkreise  $VW$  des Getriebes die halbe Breite der Stäbe aus einem willkürlichen Punkte  $f$  von  $f$  nach  $l$  und von  $l$  nach  $g$  gesetzt, und über diesem Theilkreise als Grundkreis aus  $f$  eine Epicycloide  $fnk$  beschrieben, deren Erzeugungskreis den Halbmesser  $AC$  des Rades zum Durchmesser hat. Durch  $Gl$  sey die Linie  $lk$  bis an die Epicycloide  $fk$  gezogen, und der Bogen  $kg$  dem Bogen  $fk$  gleich und ähnlich gemacht, so ist  $lk$  die größte Länge, welche der Obertheil des Stabes erhalten kann. Um aber die kleinste erforderliche Länge zu finden, so nehme man auf dem Theilkreise des Rades aus dem vorhin gefundenen Punkte  $B$ , den Bogen  $BQ$  der ge-

gegebenen Theilung gleich; ziehe den Halbmesser  $QC$ , so wird solcher den Erzeugungskreis  $AYC$  im Punkte  $P$  schneiden, welches zugleich derjenige Punkt ist, wo der Zahn  $QN$  zuerst mit dem Stabe  $AI$  in Berührung kommt (§. 259.), so wie  $O$  der Punkt ist, wo der Zahn den Stab verläßt. Mit dem Halbmesser  $GP$  beschreibe man den Bogen  $nom$ , so ist  $lo$  die kleinste Länge, welche der Obertheil des Stabes erhalten kann. Statt des Bogens  $nom$  pflegt man aber den Zahn nach irgend einer Krümmung  $npm$  dergestalt flach ab zu wölben, daß dieser Bogen in  $m$  und  $n$  mit den Bogen  $nf$  und  $mg$  eine gemeinschaftliche Tangente hat.

Die Gründe des hier gezeigten Verfahrens folgen aus dem vorhergehenden §.

Wollte man den Zähnen am Scheitel bei  $d$  einige Breite geben, so müssen alsdann die Stäbe verhältnißmäßig schmaler werden.

§. 265.

**Aufgabe.** Die vortheilhafteste Anordnung der Zähne anzugeben, wenn ein Stirnrad durch ein Getriebe bewegt wird, und wenn außerdem noch die Halbmesser der Räder, die Theilung und die Breiten der Zähne gegeben sind, auch die erste Berührung der Zähne vor der Mittelpunktslinie geschieht.

**Auflösung.** Wenn zuvor die Mittelpunktslinie  $CG$ , Figur 130., gezogen ist, so beschreibe man auf dem Theilkreise  $VW$  des Getriebes als Grundkreis, aus einem willkürlichen Punkte  $f$  die Epicycloide  $fk$ ,

Taf. VI.  
Fig. 130.

deren Erzeugungskreis den Halbmesser  $AC$  des Rades zum Durchmesser hat. Hietauf werde, wie bei der vorhergehenden Auflösung, der Getriebzahn  $fk g$  beschrieben, und eben so auf dem Theilkreise  $XZ$  des Rades, der Radzahn  $b d e$ . Mit dem Halbmesser  $Gk$  schlage man den Bogen  $kP$  bis an den Erzeugungskreis  $AYC$ , so ist  $P$  der Ort, wo der Stab den Zahn verläßt. Aus  $P$  werde der Halbmesser  $PG$  gezogen, und vom Durchschnittspunkte  $H$  die halbe Breite des Stabes von  $H$  nach  $B$  gesetzt, aus  $B$  aber auf dem Umfange des Theilkreises  $VW$ , die gegebene Theilung von  $B$  nach  $K$  getragen, so wird der Halbmesser  $KG$  den Erzeugungskreis  $AG$  im Punkte  $O$  schneiden, und dadurch den Ort bezeichnen, wo die nachfolgenden Zähne sich in Berührung befinden, wenn die vorhergehenden Zähne einander in  $P$  verlassen. Wird daher mit dem Halbmesser  $CO$  der Bogen  $nm$  beschrieben, welcher die Linie  $dh$  in  $o$  schneidet, so ist  $oh$  die kleinste Länge vom Obertheile der Radzähne, welche man mit einer flachen Wölbung  $n p m$  versehen kann.

Sollte der vorläufig gezeichnete Zahn  $fk g$  nach Vollendung des Zahns  $BPE$  nicht den erforderlichen Abstand von  $BPE$  haben, so wird solcher als nicht vorhanden angesehen, weil er nur diente, die Länge  $lk$  durch Zeichnung zu finden. Ohne Zeichnung kann man diese Länge auch durch Rechnung nach §. 260. erhalten.

## §. 266.

Verbindet man ein Kammrad mit einem Ge-

triebe, so liegen beide Räder nicht in einerlei Ebene, sobald aber der Winkel, unter welchem beide Räder gegen einander geneigt sind, gegeben ist, so weiß man auch, daß dieser demjenigen gleich ist, unter welchem sich beide Axen schneiden (§. 34. Anhang).

Es sey  $XAZ$ , Figur 131., der Umfang des Kammrades,  $CE$  seine Axe;  $AOVA$  der Umfang eines Trillings, und  $GK$  seine Axe, welche die Axe des Kammrades in  $K$  unter dem Winkel  $EKG = \omega$  schneidet, wobei vorausgesetzt wird, daß beide Umfänge einander in  $A$  berühren. Aus dem Punkte  $K$ , welcher hier der Axpunkt heißt, werde  $KA$ , und durch  $A$  und  $G$  der Durchmesser  $AV$  gezogen, so ist  $KA = KV$ . Mit dem Halbmesser  $KA$  werde über  $XZ$  eine Kugelzone  $XAZZ'X'$  beschrieben, deren Parallelkreise  $XZ$  und  $X'Z'$  durch die Punkte  $A$  und  $V$  gehen. Der Umfang  $AV$  des Getriebes als Erzeugungskreis, wird alsdann auf dem Umfange  $XZ$  des Rades als Grundkreis, bei der Fortwälzung von  $A$  nach  $X$  eine sphärische Epicycloide  $AA'$  beschreiben (§. 35. Anhang). Nimmt man an, daß diese Epicycloide  $AA'$  bei  $A$  am Umfange des Rades befestigt, und daß im Umfange des Getriebes bei  $A$  ein fester Punkt  $A$  angebracht sey, welcher sich zugleich mit dem Getriebe umdreht, dessen Dicke aber noch bei Seite gesetzt wird, so muß, wenn sich beide Räder um ihre befestigten Mittelpunkte  $C, G$  frei umdrehen können, bei der Fortbewegung des Rades von  $A$  nach  $B$ , der Punkt  $A$  von  $A$  nach  $O$  kommen. Der Umfang des Rades hat als-

Kaf. VII.  
Fig. 131.

dann den Bogen  $AB$ , und der Umfang des Getriebes den Bogen  $AO$  durchlaufen, die Epicycloide  $AA'$  ist nach  $BB'$  gekommen, und weil für diesen Fall der Bogen  $AB$  dem Bogen  $AO$  gleich ist (§. 32. Anhang), so ist die erste Bedingung §. 246. erfüllt.

Am Umfange des Rades wirke in  $A$  nach der Richtung der Tangente die Kraft  $P$ , und am Umfange des Getriebes sey nach der Richtung der Tangente in  $O$  eine Kraft  $Q$  mit  $P$  im Gleichgewichte, so wird, wenn  $w$  und  $w'$  die Wege bezeichnen, welche die Kräfte  $P$  und  $Q$  in gleicher Zeit durchlaufen, nach dem eben geführten Beweise,  $w = w'$ , also auch nach (§. 69.)  $P = Q$  seyn. Es ist daher die zweite Bedingung §. 246. erfüllt.

Weil der Theilkreis  $AV$  des Getriebes die Grundfläche eines graden Kegels bildet, dessen Scheitel in den Punkt  $K$  fällt, so kann man diesen Kegel mit der Grundfläche  $AV$  parallel durchschneiden, wodurch eine zweite Kreisfläche  $A'V'$ , Figur 133., entsteht, welche ebenfalls auf der Ase  $GK$  winkeltrecht ist, und alle Linien, wie  $AA'$ ,  $VV'$ , welche man vom Umfange des Theilkreises  $AV$  nach  $K$  zieht, werden ebenfalls durch den Umfang des Kreises  $A'V'$  gehen. Sind nun beide Kreise  $AV$ ,  $A'V'$  an der Ase  $GK$  befestigt, und wird durch ihre Fortwälzung von  $A$  nach  $E$ , durch den Punkt  $A$  die Epicycloide  $ADE$ , und durch den Punkt  $A'$  die Epicycloide  $A'D'E'$  beschrieben, so wird letztere ebenfalls in einer Kugeloberfläche liegen, deren Mittelpunkt  $K$  ist. Auch wird der Punkt

Zaf. VII.  
Fig. 133.

**A** vom Bogen  $AD$  eben so fortbewegt werden, wie **A'** vom Bogen  $A'D'$ , und man kann daher, wenn  $AA'$  die Dicke eines Rammes bezeichnet, diese beiden Bogen als Grenze der Seitenfläche des Rammes ansehen, welcher die Stöcke  $AA'$ ,  $VV'$  des Getriebes  $AV$  bewegt. Hieraus folgt, daß wenn ein Rammrad mit einem Trillinge verbunden werden soll, so müssen die Rämme nach einer sphärischen Epicycloide abgerundet werden, welche den Umfang des Rammrades zum Grundkreise und den Umfang des Trillings zum Erzeugungskreise hat; auch müssen die Seitenflächen ( $HH'F'F$ ) dieser Rämme so beschaffen seyn, daß alle grade Linien aus dem Arpunkte beider Räder, ganz in diese Seitenflächen fallen (wie  $HH'$ ,  $FF'$ ,  $EE'$ ). Die Stöcke ( $AA'$ ,  $VV'$ ) des Trillings erhalten eine solche Lage, daß sie im Arpunkte ( $K$ ) zusammen treffen.

§. 267.

**Aufgabe.** Damit ein Trilling durch ein Rammrad umgetrieben werden kann, soll man aus den Halbmessern dieser Räder, der Theilung und der Neigung beider Argen gegen einander, die Rämme und Triebstöcke anordnen.

**Auflösung.** Es sey  $AC$ , Figur 134. 135. und 136., der Halbmesser vom Theilrisse des Rammrades, und auf dieser Linie habe man den Winkel  $CAV$  dem Winkel, unter welchem sich die Argen beider Räder schneiden sollen, gleich gemacht. Der Halbmesser vom Theilrisse werde von  $A$  nach  $G$  und von  $G$  nach  $V$

Taf. VII.  
Fig. 134.  
135. 136.

getragen, und winkelrecht auf  $AV$  die Linie  $GK$  bis an die Ase  $CK$  des Rades gezogen, so ist  $K$  der Mittelpunkt beider Räder.

**Taf. VII.** Es sey ferner  $GA$ , Figur 137., der Halbmesser, **Fig. 137.** und  $AOV$  ein Theil vom Umfange des Getriebes, und der Bogen  $AO$  eben so groß als die Theilung des Rades. Man ziehe die Sehne  $AO$ , setze die gegebene oder willkürlich angenommene Dicke der Triebstöcke von  $O$  nach  $o$ , ziehe  $oo'$  auf  $AG$  winkelrecht, so ist  $AO'$  die kleinste Höhe eines Kamms, welche **Fig. 134.** 135. oder 136. aus  $A$  nach  $o$  getragen, und von  $o$  nach  $K$  die Linie  $oK$  gezogen wird. Von  $A$  nach  $a$  trage man die gegebene oder willkürlich angenommene Dicke der Kämme, und schlage aus  $K$  die Bogen  $AV$  und  $an$ , so ist  $AanN$  der Querschnitt, und die Stellung eines Kamms gegen den Halbmesser  $AC$  seines Rades, wenn vorausgesetzt wird, daß der Schnitt durch die Mitte des Kamms und die Ase des Kammrades geht. Statt der Bogen  $AN$ , an kann man auch grade Linien bei der Verfertigung der Kämme wählen.

Auf derjenigen Kugelzone, welche der Bogen  $AV$  beschreibt, indem sich die Figur  $CAVW$  um die Ase  $WC$  dreht, werde eine sphärische Epicycloide beschrieben, (§. 35. 36. Anhang) deren Erzeugungskreis dem Theilrisse des Getriebes gleich ist. Diese Epicycloide sey  $ADFE$ , Figur 133., und man setze von  $E$  bis  $L$  und von  $L$  bis  $H$  die halbe Breite eines Kamms und Stocks, mache den Bogen  $HF$  dem Bogen  $EF$  gleich und ähnlich, nehme  $LN = AN$ , Figur 134.,

135. oder 136., ziehe durch N, Figur 133., die Linie  $mm'$  mit HE parallel, so ist Hm m'E die Vorderansicht des Rammes, von welchem, wie Figur 123., die halbe Dicke des Stocks abgeschnitten wird. Die Seitenflächen werden alsdann dadurch bestimmt, daß von allen Punkten im Umfange der Vorderansicht grade Linien nach dem Arpunkte K gezogen werden. Den Obertheil des Rammes kann man, wie Figur 138., bei EH so abrunden, daß die Wölbung beide Seitenflächen berührt; auch müssen die Rämme nach unten zu so viel verlängert werden, daß die Triebstöcke frei spielen können. Die Linien Aa, VV', Figur 134. 135. oder 136., geben die Lage der Triebstöcke, welche abgetürzte Regel bilden, deren fehlende Spitze in den Arpunkt K fällt.

Taf. VII.  
Fig. 133.

Taf. V.  
Fig. 123.

Taf. VII.  
Fig. 138.

Fig. 134.  
135. 136.

### §. 268.

**Aufgabe.** Die Kraft zu finden, welche am Umfange des Rammrades erfordert wird, um die Reibung zwischen den Rämmen und den Stöcken des zugehörigen Getriebes zu überwältigen.

**Auflösung.** Zur Vereinfachung der Rechnung kann man annehmen, daß die kleine Fläche ABO, Figur 131., welche einen Theil von der Oberfläche einer Kugel bildet, in einerlei Ebene mit dem Theilkreise AQV des Getriebes falle, so daß der Bogen AB der Linie AB in der ebenen Figur 132. gleich sey. Als- dann ist, Figur 132., der Winkel  $OAB = \frac{1}{2} A G O = \frac{1}{2} \beta$ , und die Kraft P, welche nach AB wirkt, kann winkelrecht auf AB nach AF, und nach AO winkelrecht

Fig. 131.



auf die Tangente  $L'O$  des Zahns zerlegt werden. Diese Kraft verursacht nach der Richtung  $OP'$  einen Normaldruck gegen den Stöß  $O = \frac{P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$ , wovon eine Reibung  $\frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$  entsteht, welche einen Widerstand nach der Richtung  $OL'$  verursacht. Es wird daher nach  $OL$  eine eben so große Kraft erfordert, und wenn man diese parallel mit  $AB$  nach  $OM$ , und senkrecht auf  $AB$  nach  $ON$  zerlegt, so wird diese letztere Kraft vom Kammrade aufgehoben, die erste nach  $OM$  ist  $= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cdot \cos LOM$ . Aber  $LOM = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ , also  $\cos LOM = \sin \frac{1}{2}\beta$ , daher ist die nach der Richtung  $OM$  erforderliche Kraft

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cdot \sin \frac{1}{2}\beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta.$$

Oder wenn die zur Ueberwältigung der Reibung nach der Richtung  $AP$  erforderliche Kraft  $= f$  gesetzt wird, so ist

$$(I) \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta,$$

oder, wenn  $n$  die Anzahl der Stöße des Getriebes ist,

$$(II) \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}.$$

Nach §. 255. ist nahe genug  $\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = \frac{3n}{n^2 - 4}$ , daher

$$(III) \quad f = \frac{3\mu n}{n^2 - 4} P.$$

Beispiel. Für  $n = 8$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ , und  $P = 100$  findet man nach (II)

$$f = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,4142 = 6,90 \text{ Pfund}$$

und nach (III)

$$f = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 100}{8^2 - 4} = 6,66 \text{ Pfund.}$$

§. 269.

Mit dem Theilrisse  $XAZ$ , Figur 139., eines Taf. VIII. Kammrades sey der Theilriß  $AV$  des zugehörigen Ge- Fig. 139. triebes bei  $A$  in Berührung, so wird die Lage beider Kreise durch den Winkel  $C'KG$ , welchen die Arcen beider Räder bilden, bestimmt, und  $K$  ist der Arpunct. Wird der grade Regel  $AKV$  auf dem Theilkreise  $XZ$  so fortgewälzt, daß die Spitze desselben in  $K$  bleibt, so beschreibt der Umfang der Grundfläche  $AV$  eine Kugelzone  $XAZZ'VX'$ . Der Halbmesser  $AG$  werde als Durchmesser eines Kreises  $AOGA$  angenommen, dessen Mittelpunkt  $G'$  ist. Man ziehe  $G'K'$  mit  $GK$  parallel, so wird  $K'$  in die Linie  $C'C$  fallen, weil die Linien  $AV$  und  $CC'$  in einerlei Ebene liegen. Auch ist  $G'K'$  auf der Fläche  $AG$  winkelrecht, weil  $GK$  auf der Fläche  $AV$  winkelrecht ist, und daherhalb wird  $G'K'$  die Arc eines graden Regels  $AGK'$ , dessen Spitze  $K'$  in  $CC'$  liegt. Wälzt sich der Regel  $AGK'$  von  $A$  nach  $X$ , indem seine Spitze im Punkte  $K'$  bleibt, so wird der Punkt  $A$  eine sphärische Epicycloide  $ADE$  auf der Oberfläche  $XZzx$  beschreiben, deren Halbmesser  $AK' = GK'$  ist. Der Kreis  $AV$  werde mit  $AG$  zugleich nach  $E$  gewälzt, so kommt der Punkt  $A$  des Kreises  $AG$  nach  $E$ , wenn der Punkt  $V$  des Kreises  $AV$ , von  $V$  nach  $E$  kommt, oder wenn der halbe Umfang von  $AV$  abgewälzt ist. Der beschreibende Punkt  $A$  des Kreises  $AG$  hat alsdann auch noch innerhalb des Kreises  $AV$  eine Hypocycloide

beschrieben, welche grade ist, und in den Durchmesser  $AV$  fällt (§. 27. Anhang).

Man setze nun voraus, daß die Theilrisse  $XZ$  und  $AV$  sich frei um ihre unverrückbare Mittelpunkte  $C$  und  $G$  drehen können, und daß mit dem Umfange  $XZ$  des Rades die Epicycloide  $AD$ , und mit dem Getriebe  $AV$  die Hypocycloide oder der Halbmesser  $GA$  so verbunden werde, daß der Bogen  $AD$  den Halbmesser  $GA$  fortschieben kann. Ist der Bogen  $AD$  in  $B \cdot B'$  angelangt, so wird der Halbmesser  $GA$  nach  $GA'$  kommen, der Bogen  $AA'$  ist  $= AB$ , und im gemeinschaftlichen Punkte  $O$  wird der Bogen  $BB'$  vom Halbmesser  $GA'$  berührt. Es läßt sich daher auch hier eben so wie §. 266. beweisen, daß durch diese Anordnung die Bedingungen §. 246. erfüllt werden.

269. Mit der Grundfläche  $AV$  des Kegels  $AVK$ .  
 Taf. VIII. 140. sen der Querschnitt  $av$ , Figur 140., parallel, und der  
 Fig. 140. Halbmesser  $ag$  desselben werde zum Durchmesser eines Kreises angenommen, welcher in die Kreisfläche  $av$  fällt. Aus dem Mittelpunkte  $g'$  der Kreisfläche  $ag$  ziehe man  $g'k$  mit  $GK$  parallel, so ist  $g'k$  die Axe des winkelrechten Kegels  $agk$ . Der Kreis  $AV$ , mit welchem  $av$  an der gemeinschaftlichen Axe  $GK$  verbunden ist, wälze sich von  $A$  nach  $E$ , der Punkt  $A$  des Kreises  $AG$  beschreibe die sphärische Epicycloide  $ADE$ , während der Kreis  $ag$  die sphärische Epicycloide  $ade$  beschreibt, welche in die Kugeloberfläche  $aox'x'a$  fällt, deren Halbmesser  $kx'$  ist, so wird jede Linie wie  $AK$  oder  $DK$ , welche durch einen Punkt

**A** oder **D** der äußersten Epicycloide nach dem Arpunkte **K** gezogen wird, die innere Epicycloide in dem Punkte **a** oder **d** schneiden. So wie der Bogen **AD** den Halbmesser **GA** forttreibt, eben so wird **ad** den Halbmesser **ga** fortbewegen, und wenn man daher beide Epicycloiden durch eine Fläche **ADda** verbindet, welche die Seitenfläche der Rämme vorstellt, und durch die Punkte **AagG** die feste Ebene **AagG** legt, welche die Seitenfläche der Zähne des Getriebes vorstellt, so wird die Bewegung eben so erfolgen, als wenn der einzige Bogen **AD** den Halbmesser **GA** fortgeschoben hätte.

Die vortheilhafte Einrichtung der Rämme eines Rades und der Zähne eines Getriebes erfordert daher, daß zur Bestimmung der Seitenfläche der Rämme, auf ihrer Vorderseite eine sphärische Epicycloide beschrieben werde, welche zum Grundkreise den Umfang des Kammrades, und als Durchmesser des Erzeugungskreises, den Halbmesser des Getriebes erhält. Von dieser Kurve werden grade Linien nach dem Arpunkte **K** gezogen, so ist dadurch die Seitenfläche des Kamms bestimmt. Die Zähne des Getriebes erhalten zur Seitenfläche Ebenen, welche durch die Ase des Getriebes gehen.

§. 270.

**Aufgabe.** Ein Getriebe mit Zähnen soll durch ein Kammrad umgetrieben werden; man sucht die Anordnung und Gestalt der Rämme und Zähne, wenn

die Halbmesser der Räder, ihre Theilung und die Neigung beider Axen gegen einander gegeben sind.

**Zaf. VIII. Auflösung.** Es sey  $AC$ , Figur 141., 142. oder 143., der Halbmesser des Kammrades,  $AV$  der Durchmesser des Getriebes, und der Winkel  $CAV$  dem gegebenen Winkel gleich, unter welchem sich die Axen der Räder schneiden sollen. Aus der Mitte von  $AV$  werde  $GK$  auf  $AV$  winkelrecht, bis an die Ase  $CK$  des Kammrades, und von  $K$  die Linien  $KA$ ,  $KV$  gezogen. Von  $A$  nach  $a$  werde die Dicke des Kamms gesetzt, und durch  $a$  die Linie  $av$  mit  $AV$  parallel gezogen. Man halbire  $AG$  in  $G'$  und  $ag$  in  $g'$ , ziehe die Linien  $G'K'$ ,  $g'k$  mit  $GK$  parallel, schlage aus  $K'$  mit dem Halbmesser  $AK'$  den Bogen  $AG$ , und aus  $k$  mit dem Halbmesser  $ak$  den Bogen  $ag$ , so muß der Durchschnitt des Kamms in die Fläche  $AGga$  fallen.

Mit dem Halbmesser  $GA$  des Getriebes beschreibe man den Kreisbogen  $AV$ , Figur 144., und nehme zugleich diesen Halbmesser als Durchmesser des Kreises  $AOG$  an. Von  $A$  nach  $A'$  werde die Theilung des Rades getragen, die Linie  $GA'$  gezogen, und wo diese den Umfang des kleinen Kreises in  $O$  schneidet, ziehe man  $Oo$  auf  $AG$  winkelrecht, so ist  $Ao$  die kleinste Höhe des Kamms, welche man, Figur 141., 142. oder 143., auf  $AV$  von  $A$  bis  $o$  trägt, und wenn alsdann durch  $o$  und  $K$  die Linie  $KN$  gezogen wird, so ist  $ANna$  derjenige Querschnitt des Kamms, welcher erweitert in die Ase des Kammrades fällt. Eben

so ist Aon'a die kleinste Seitenfläche des Zahns am Getriebe.

Auf derjenigen Kugelzone, welche entsteht, wenn sich der Bogen ANG um die Aze K'C dreht, wozu der Kugelhalbmesser AK' gehört, beschreibe man eine sphärische Epicycloide (§. 35. Anhang), deren Erzeugungskreis den Halbmesser AG des Getriebes zum Durchmesser hat, und verfähre wie §. 267., so erhält man die Gestalt des Rammes H m m' L, Figur 140. Taf. VIII. Die Gestalt der Zähne des Getriebes ist auf beiden Seitenflächen eben, man kann aber den Obertheil der Zähne abrunden, wie Figur 145. Fig. 140. Fig. 145.

Die Gründe der gegebenen Auflösung sind im vorhergehenden §. auseinander gesetzt.

### §. 271.

**Aufgabe.** Die Kraft zu finden, welche am Umfange des Rammrades erfordert wird, um der Reibung zwischen den Rämmen und den Zähnen des Getriebes das Gleichgewicht zu halten.

**Auflösung.** Auf eine ähnliche Art wie §. 268. sey, Figur 144., die Ebene, in welcher sich der Kamm BO und der Zahn A'O befindet. Die Kraft P am Umfange des Rammrades wirke nach der Richtung AP, so verursacht solche mittelst des Rammes auf den Zahn bei O, nach der Richtung AO, den Normaldruck  $\frac{P}{\cos OAB}$ , oder weil  $AGO = \beta$ , so ist dieser Druck  $= \frac{P}{\cos \beta}$ , und die davon entstehende Reibung, welche

nach der Richtung  $OG$  die Bewegung aufhält,  $= \frac{\mu P}{\cos \beta}$ .

Zur Ueberwältigung dieser Reibung werde nach der mit  $AB$  parallelen Richtung  $OM$  eine Kraft  $f$  erfordert, so ist  $f = \frac{\mu P}{\cos \beta} \cos A'OM$ , oder es ist, weil

$A'OM = 90^\circ - \beta$ , also  $\cos A'OM = \sin \beta$ ,

die zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Kamm und Zahn erforderliche Kraft

$$(I) \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \beta$$

oder wenn das Getriebe  $n$  Zähne hat

$$(II) \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n}.$$

Nach §. 161. ist ferner  $\operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n} = \frac{6n}{n^2 - 16}$ , daher auch

$$(III) \quad f = \frac{6\mu n}{n^2 - 16} P.$$

Beispiel. Für  $n = 8$ ,  $\mu = \frac{1}{6}$  und  $P = 100$  ist nach (II)

$$f = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 1 = 16,67$$

oder nach (III)

$$f = \frac{6 \cdot 8 \cdot 100}{6 \cdot 48} = 16,67.$$

§. 272.

Zaf. IX. Mit einem Rade  $AV$ , Figur 146., welches um seinen festen Mittelpunkt  $G$  frei herumbewegt werden kann, ist eine grade Stange  $XZ$  so verbunden, daß solche sich frei nach der Richtung  $XZ$  bewegt, und zugleich als Tangente das Rad in  $A$  berührt. Im Berührungspunkte  $A$  beschreibe man auf der Stange eine Enfloide (§. 4. Anhang)  $AA'$ , deren Erzeugungsreis dem Umfange  $AV$  des Rades gleich ist, und setze

voraus, daß solche bei A an die Stange befestiget werde. Ferner sey im Rade A V ein fester Punkt bei A, welcher vom Bogen AA' fortgeschoben werden kann, so wird bei der Fortbewegung der Stange, wenn der Bogen AA' nach BB' kommt, der Punkt A in O anlangen. Alsdann ist aber nach den Eigenschaften der Evkloide, die Weite AB dem Bogen AO gleich; giebt man daher den Zähnen einer graden Stange die Rundung einer Evkloide, so werden die Bedingungen §. 246. erfüllt, welches sich eben so wie §. 266. beweisen läßt.

Sollen die Stöcke eine gegebene Dicke erhalten, so wird eben so wie §. 247., Figur 123., verfahren, Taf. V.  
Fig. 123. indem man zur Bestimmung der Rundung des Zahns, eine mit der Evkloide parallele Kurve beschreibt, welche in allen Theilen von der Evkloide um die halbe Dicke des Stocks normal absteht.

Die grade Stange, welche mit Zähnen oder Rämmen versehen wird, heißt der Rammbaum, und diejenige grade Linie, welche den Theilkreis oder Umfang des Getriebes berührt, der Theilriß des Rammbaumes.  
§. 273.

Aufgabe. Eine grade gezahnte Stange oder ein 'Rammbaum' soll einen Trilling bewegen; man sucht die angemessene Gestalt der Zähne und Stöcke.

Auflösung. Es sey AOV, Figur 147., der Taf. IX.  
Fig. 147. Theilkreis des Trillings, XZ der Theilriß des Rammbaums, und A der Berührungspunkt. Ueber XZ beschreibe man aus A die Evkloide AA' (§. 4. An-



hang), indem der Theilkreis AOV als Erzeugungskreis angenommen wird. Mit AA' parallel beschreibt man die Kurve DE, so daß alle Normalabstände zwischen beiden Kurven der halben Dicke der Eriebfläche gleich werden. Ferner werde der Bogen AO der gegebenen Theilung des Rades gleich gemacht, die Linie AO gezogen; auf OA von O nach o die halbe Dicke des Stoßes gesetzt, und aus o mit ZX parallel die Linie oE bis an den Bogen DE gezogen, so ist durch den gefundenen Punkt E die kleinste Höhe des Zahns bestimmt. Wird nun die gegebene Breite des Zahns von D bis F getragen, so läßt sich daraus die Gestalt des Zahns auf eine ähnliche Art wie §. 249. bestimmen. Die Stöcke werden durchgängig cylindrisch und mit der Ase des Trillings parallel angeordnet.

## §. 274.

Zur Bestimmung der Kraft, welche zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Rämmen und Stöcken erfordert wird, kann man auf eine ähnliche Art wie §. 268. verfahren. Man findet alsdann mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung, die längs des Kammbaumes zur Erhaltung des Gleichgewichts der Reibung erforderliche Kraft

$$(I) \quad f = \mu P \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \mu P \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

oder auch

$$(II) \quad f = \frac{3\mu n}{n^2 - 4} P.$$

## §. 275.

Aufgabe. Eine grade gezahnte Stange ist

## Von der Gestalt der Zähne u. Rämme. 391

in mit Zähnen versehenes Getriebe umtreiben; man sucht die erforderliche Gestalt der Zähne.

**Auflösung.** Es sey A der Berührungspunkt vom Theilrisse des Rades AV, Figur 148., und von der gezahnten Stange XZ. Ueber XZ beschreibe man Taf. IX. Fig. 148. eine Epfloide AA', deren Erzeugungskreis AOG den Halbmesser AG des Rades zum Durchmesser hat. Der Bogen AA' sey der Theilung des Rades gleich; man ziehe A'G, und wo diese Linie den Umfang des Erzeugungskreises in O schneidet, ziehe man OD bis an die Epfloide AA' mit ZX parallel, so wird durch D die kleinste Höhe vom Obertheile des Zahns an der Stange bestimmt. Die grade Linie A'O ist die kleinste Länge von der Seitenfläche des Radzahns, und wenn man auf eine ähnliche Art wie §. 257. verfährt, so erhält man die übrige Anordnung.

Die Gründe dieses Verfahrens beruhen auf §. 272. und 256.

### §. 276.

Die am Kammbaume erforderliche Kraft zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Rämmen und den Zähnen des Getriebes, findet man auf eine ähnliche Art wie §. 271.

$$f = \mu P \operatorname{tgt} \beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n},$$

oder auch

$$f = \frac{6\mu n}{n^2 - 16} P.$$

### §. 277.

**Aufgabe.** Ein Getriebe mit Zähnen soll ei-

nen graden Kammbaum umtreiben, man sucht die erforderliche Gestalt der Zähne für das Rad und den Baum.

**Auflösung.** Wollte man die Anordnung §. 275., Taf. IX. Figur 148., beibehalten, so würde an den Zähnen der Stange eine Reibung gegen den Span (§. 249.) entstehen. Diese zu vermeiden wähle man folgende Einrichtung.

Fig. 149. Im Berührungspunkte A, Figur 149., wo der Umfang AV des Getriebes mit dem Theilriss XZ des Kammbaumes zusammenfällt, beschreibe man eine Kreisevolvente (§. 43. Anhang), indem auf dem Umfange vAV eine feine Schnur in v befestigt und bis A angespannt, nachher aber mittelst Abwicklung der angespannten Schnur und eines am Ende A befestigten Stifts die Evolvente oder Abwicklungslinie AA' beschrieben wird. Auf ZX trage man von A nach O die Theilung der Zähne, und schlage aus G mit der Weite GO den Bogen OD bis an die Evolvente AA' in D, so wird durch den Punkt D die kleinste Höhe vom Obertheile der Zähne des Rades bestimmt. Verlängert man den Halbmesser GA des Getriebes bis E, so ist die grade Linie AE, die Seitenfläche des Zahns an der Stange, und zugleich die kleinste Länge desselben. Aus der gegebenen Breite AF der Zähne des Getriebes läßt sich nun leicht auf eine ähnliche Art wie §. 275. ihre Gestalt bestimmen. Dasselbe gilt von den Zähnen der Stange.

Die Gründe dieses Verfahrens lassen sich aus dem Vorhergehenden und theils daher entnehmen, daß

Bei der Drehung des Rades, wenn der Punkt A nach M kommt, der Punkt A des Rammbaumes von A in O anlangt. Nach den Eigenschaften der Kreisevolvente ist aber A O dem Bogen A M gleich, daher haben die Zähne die erforderliche Eintheilung erhalten.

Auch läßt sich übersehen, daß jederzeit die Berührung zwischen Ramm und Zahn in der Linie XZ geschehen müsse.

§. 278.

Die Reibung zwischen Ramm und Zahn bleibt gleich groß, der Ramm mag den Zahn oder der Zahn den Ramm fortbewegen, wie man sich leicht überzeugen kann. Es ist daher wie §. 276.

$$f = \mu P \operatorname{tgt} \beta.$$

Es ist aber nach Figur 149.

$$\operatorname{tgt} \beta = \frac{AO}{GO} = \frac{AM}{GO}. \text{ Aber } AM = \frac{2\pi \cdot GO}{n}, \text{ daher}$$

$$\frac{AM}{GO} = \frac{2\pi}{n}, \text{ folglich}$$

$$f = \frac{2\pi}{n} \mu P.$$

§. 279.

Eine Stange VW, Figur 150., sey so angeordnet, daß sie vertikal aufwärts gehoben werden kann, und alsdann durch ihr eigenes Gewicht wieder frei herunter fällt, um andere Körper zu zerstoßen, so wird VW ein Stampfer genannt. Zur Bewegung des Stampfers kann man an demselben einen Hebezapfen AB anbringen, welcher durch die Umdrehung einer Welle EG mittelst des Hebedaumen EAD bis zu

Taf. IX.  
Fig. 149.

Fig. 150.

einer gewissen Höhe  $AH$  gehoben wird, wo der Daumen den Zapfen verläßt, und der Stampfer zwischen seinen Scheidelatten frei hernuter fällt. Während der Zeit, in welcher der Stampfer fällt, und weil man denselben, wenn er seinen niedrigsten Stand erreicht hat, nicht augenblicklich wieder aufhebt, müßte die Kraft am Umfange der Welle vergeblich wirken, wenn nicht mit der Daumenwelle noch mehrere oder wenigstens noch ein Stampfer verbunden wäre, damit in dem Augenblicke, wenn ein Daumen den Zapfen verläßt, ein anderer Daumen den Zapfen eines andern Stampfers ergreift und so aufhebt, daß unter allen Umständen die erforderliche Kraft gleich groß bleibt.

Es läßt sich leicht einsehn, daß sich auf eine ähnliche Art wie §. 277. mittelst der Kreisevolvente (Anhang §. 42.) diese Anordnung bewirken läßt. Denn es sey  $AB$  ein wagerechter Hebezapfen in seinem niedrigsten Stande, und in der Verlängerung von  $BA$  liege der Halbmesser  $AG$  des Theilkreises der Daumenwelle. Auf diesem Theilkreise als Evolute werde die Evolvente  $AD$  beschrieben, und nach ihr der Daumen gestaltet, so wird zur Fortbewegung des Zapfens in allen Lagen des Daumen nur einerlei Kraft am Umfange der Welle erfordert. Wäre der Punkt  $A$  des Theilrisses nach  $M$ , und der Punkt  $D$  des Zapfens nach  $H$  gekommen, so ist (§. 42. Anhang) der Bogen  $AM = AH$ , also wie §. 266. die Kraft zum Erheben der Daumen in allen Lagen desselben einerlei. Von der Wahrheit dieses Satzes kann man sich auch

Durch folgende Betrachtung überzeugen. Zur Umdrehung der Daumenwelle wirke am Umfange des Theilkreises in L die Kraft P nach der Richtung der Tangente LP, so ist der von P in H entstehende Druck P' winkeltrecht auf LH oder

$$P' = \frac{GL}{GH} \cdot P \text{ (§. 39.)}$$

Die Linie AH ist eine Normale der Evolvente in H (§. 44. Anhang); der Daumen wird daher von der Linie HH' in H berührt, und wenn man die Kraft P' auf die Verlängerung von AH nach HQ und nach dem Mittelpunkte G zerlegt, so wird die Kraft nach HQ, welche hier Q heißen soll, ganz auf die Erhebung des Zapfens verwandt, wogegen die Kraft nach HG von dem festen Mittelpunkte der Welle aufgehoben wird. Man zeichne das Parallelogramm der Kräfte HP'QN, so verhält sich

$$P' : Q = HP' : HQ$$

und weil die Dreiecke HQP' und AGH einander ähnlich sind, so ist auch

$$HP' : HQ = AG : GH, \text{ also}$$

$$P' : Q = AG : GH, \text{ daher}$$

$$P' = \frac{AG}{GH} \cdot Q = \frac{GL}{GH} Q.$$

Es war aber

$$P' = \frac{GL}{GH} \cdot P, \text{ daher ist auch}$$

$$P = Q,$$

wie erfordert wird.

§. 280.

**Aufgabe.** Die größte Höhe, auf welche die

Stampfer gehoben werden sollen, oder die Erhebungshöhe ist gegeben, man sucht die Anordnung der Daumen, damit von zwei Stampfern jederzeit einer gehoben wird.

**Satz IX.**      **Auflösung.** Die Erhebungshöhe  $AH$ , Figur  
**Fig. 150.** 150., sey  $= h$ , der Halbmesser des Theilkreises  $AG = a$ ,  
 und die Anzahl der Daumen für beide Stampfer  $= n$ ,  
 so ist der abgewickelte Bogen  $AM = h$ , also  $n \cdot AM$ ,  
 oder der Umfang des Theilkreises  $2\pi a = nh$ , oder  
 dessen Halbmesser

$$(I) \quad a = \frac{nh}{2\pi} = 0,15915 \, nh$$

wo man für  $n$  eine grade Zahl annehmen muß, und mittelst der gegebenen Höhe  $h$  alsdann den Halbmesser  $a$  finden kann. Sollte aber von drei Stampfern stets nur einer gehoben werden, so müßte  $n$  eine durch 3 theilbare Zahl seyn.

Man ziehe eine wagerechte Linie  $GB$  unbestimmt lang, beschreibe aus  $G$  mit dem gefundenen Halbmesser  $a$  den Theilkreis  $AMIA$ , trage aus  $A$  winkelrecht auf  $BG$  die Höhe  $AH = h$ , befestige in  $A$  am Umfange des Theilkreises einen dünnen Faden, dessen Länge  $= AH$  ist, lege denselben um den Theilkreis, und beschreibe mit dem Endpunkte  $H$  des Fadens die Kreisevolvente  $MH$ . Es versteht sich von selbst, daß man zur Beschreibung der Evolvente  $MH$  eine gut abgedrehte kreisrunde Scheibe haben muß, deren Halbmesser  $AG = a$  ist. Den Halbmesser der Welle  $GE$  nehme man willkürlich aber kleiner als  $AG$  an, und

beschreibe aus  $G$  den Umfang des Wellbaumes  $EfE$ . Auf  $AH$  nehme man  $HK$  willkürlich, hier etwa  $\frac{1}{2} AH$ , ziehe  $GK$ , welche den Umfang des Wellbaumes in  $F$  schneidet, trage von  $F$  nach  $f$  die Breite des Daumen am Umfange des Wellbaums, und verbinde die Punkte  $M, f$  durch einen willkürlichen Bogen  $Mf$ , welcher bei  $M$  mit  $MH$  eine gemeinschaftliche Tangente hat, so ist  $FfM HKF$  die Lehre (Echablone) für die Daumen, und wenn man die Weite  $GH$  von  $G$  nach  $d$  trägt, so ist  $Ad$  die kleinste Länge des Hebezapfens, welcher noch um einen kleinen Theil  $dB$  verlängert wird. Der tiefste Stand der Hebezapfen wird alsdann durch  $AB$  und der höchste durch  $HH'$  angezeigt.

So wie diese Anordnung für zwei Stampfer gemacht ist, kann solche auch auf drei und mehrere, von welchen stets nur einer gehoben wird, angewandt werden. Auch kann man die Einrichtung machen, daß mehrere Stampfer zugleich von der Daumenwelle gehoben werden, weil hiebei dieselbe Verfahrensart beobachtet wird; nur müssen alsdann nicht alle Daumen zugleich ihre Zapfen verlassen, sondern es muß solches in gleichen Zwischenräumen geschehen.

Sobald aus der Erhebungshöhe  $h$  der Halbmesser  $a$  des Theilkreises gefunden ist, läßt sich hieraus die Länge der Hebedaumen berechnen. Man rechne diese Länge vom Mittelpunkte der Welle bis zum äußersten Ende des Daumen, indem man solche  $= l$  setzt, so ist, Figur 150.,  $GH = l$ , daher wegen des recht-



winklichten Dreiecks  $A G H$  die Länge des Hebe-  
daumen

$$(II) \quad l = \sqrt{a^2 + h^2} = h \sqrt{1 + 0,0253287 n^2}.$$

§. 281.

**Zusatz.** Die hier beschriebene Anordnung hat für die Ausübung den Nachtheil, daß der einzige Punkt **A**, Figur 150., des Hebezapfens, auf der Fläche  $A D$  des Daumen abgeleitet, und daß sich der Zapfen bei **A** endlich so stark abnußt, daß anstatt des Punktes **A** eine Fläche entsteht, wodurch die gleichförmige Wirkung der Daumen verloren geht. Um diesen Nachtheil zu vermeiden, kann man am äußersten Ende der Hebezapfen in **A** kleine metallene Rollen anbringen, welche sich um eiserne Bolzen drehen. In diesem Falle bleibt die ganze Anordnung wie im vorigen §., so daß **A D**, **M H**, Figur 151., die Evolventen für die Evolute **A M** sind. Werden nun in **A** und **H** die Mittelpunkte von den Rollen der Hebezapfen angebracht, und man beschreibt mit dem Halbmesser  $H h$  der Rolle lauter Kreisbogen, deren Mittelpunkte in die Evolvente **H M** fallen, so kann man durch die äußersten Punkte  $n, n, n \dots$  eine Parallele  $h n m$  mit der Evolvente **H N M** ziehen, wodurch die Gestalt des Daumen  $h m f F h$  erhalten wird.

Es läßt sich einsehen, daß bei dieser Einrichtung die Erhebung der Zapfen eben so wie im vorigen §. erfolgen muß, nur wird noch der Umstand eintreten, daß der Zapfen in seiner höchsten Stellung nicht so

gleich vom Daumen verlassen wird, sondern noch einer geringen Zeit bedarf, bis er herunterfällt.

§. 282.

**Aufgabe.** Die Kraft zu bestimmen, welche am Theilkreise der Daumienwelle erfordert wird, um einen Stampfer zu erheben, und die Reibung an den Scheidelatten und dem Daumen zu überwältigen.

**Auflösung.** Der vertikale Stampfer DE, Taf. IX.  
 Fig. 152., sey zwischen den Scheidelatten M, M' und Fig. 152.  
 N, N' beweglich. Man setze die Länge des Hebezapfens HF, bis zur Mitte des Stampfers gerechnet,  $= b$ , die Entfernung der Scheidelatten  $MN = c$ , und für irgend eine Lage des Stampfers den Abstand  $N'F = e$ . Das Gewicht des Stampfers sey Q, welches im Schwerpunkte desselben nach vertikaler Richtung DE abwärts wirkt, auch sey in H nach vertikaler Richtung aufwärts eine Kraft angebracht, welche mit Q im Gleichgewichte ist, so entsteht gegen die Scheidelatte M nach der Richtung Mp' ein horizontaler Druck  $p' = \frac{bQ}{c}$  (§. 68.), und eben so groß ist der horizontale Druck p" gegen die Scheidelatte N' nach der Richtung N'p". Wegen der Last Q und der gesammten Reibung an den Scheidelatten widerstehe das Ende H des Hebezapfens nach vertikaler Richtung HA mit einer Kraft V', so entsteht davon bei H eine Reibung  $= \mu V'$ ; der Daumen strebt daher, den Zapfen FH nach der horizontalen Richtung HK mit der Gewalt  $\mu V'$  fortzuziehen, wodurch gegen die Scheidelatte M

nach der Richtung  $M'q'$  ein Horizontaldruck  $q' = \frac{e \cdot \mu V'}{c}$ ,  
und gegen die Scheidelatte  $N'$  nach der Richtung  $N'q'$   
ein Horizontaldruck  $q' = \frac{(c - e) \cdot \mu V'}{c}$  (§. 40.) entsteht.

An den obern Scheidelatten wird daher der Stampfer  
gegen  $M$  mit der Kraft  $p'$ , und gegen  $M'$  mit der  
Kraft  $q'$  gepreßt. Ist nun  $p'$  größer als  $q'$ , so ist der  
Druck gegen  $M = p' - q' = \frac{bQ}{c} - \frac{\mu e V'}{c}$ , so lange  
daher  $bQ > \mu e V'$  ist, bleibt der Druck gegen  $M = p' - q'$ ,  
und die davon an den obern Scheidelatten entstehende  
Reibung  $= \mu (p' - q')$ . Wäre aber  $q' > p'$ , so  
ist diese Reibung  $= \mu (q' - p')$ . Wird eine oder  
die andere Voraussetzung bei der weitem Ausführung  
der Rechnung angenommen, so müssen auch danach die  
Resultate verschieden ausfallen, welches sehr wohl zu  
merken ist. Setzt man, wie es gemeiniglich der Fall  
ist,  $p' > q'$ , also  $bQ > \mu e V'$ , so ist die Reibung  
an den obern Scheidelatten  $= \mu (p' - q')$ , und an  
den untern bei  $N' = \mu (p' + q')$ , also die gesammte  
Reibung an den Scheidelatten

$$\mu (p' + p' - q' + q') = \mu \left( \frac{2bQ}{c} + \frac{c - 2e}{c} \mu V' \right).$$

Diese Reibung sowohl als die Last  $Q$  verursachen am  
Hebezapfen den Widerstand  $V'$ , welcher dem Daumen  
nach der Richtung  $HA$  widersteht, es ist daher

$$V' = Q + \mu \left( \frac{2bQ}{c} + \frac{c - 2e}{c} \mu V' \right), \text{ und hieraus}$$

$$V' = \frac{c + 2\mu b}{c - \mu^2 (c - 2e)} Q.$$

Zur Ueberwältigung dieses Widerstandes  $V'$  und der

Reibung  $\mu V'$  zwischen Daumen und Zapfen werde nach der Richtung  $AH$  eine Kraft  $V$  erfordert, welche der Kraft  $V'$  grade entgegen wirkt, so bleibt noch die Kraft  $V - V'$  nach der Richtung  $HL$  übrig, um die Reibung  $\mu V'$ , welche nach der Richtung  $HF$  widersteht, zu überwältigen. Man zerlege die Kraft  $V - V'$  nach der Richtung  $HK$  und nach  $HI$  in der Verlängerung des Halbmessers  $GH$ , so wird letztere Kraft durch den Mittelpunkt der Daumenwelle aufgehoben, die Kraft nach  $HK$  ist aber, wenn  $KL$  parallel mit  $HI$  gezogen wird,  $= \frac{V - V'}{\operatorname{tg} \angle HKL}$ , oder wenn man  $\angle AGH = \beta$  setzt, so ist auch  $\angle HKL = \beta$ , daher die Kraft, welche nach der Richtung  $HK$  wirkt,  $= \frac{V - V'}{\operatorname{tg} \beta}$ , und weil diese der Reibung  $\mu V'$  nach entgegengesetzter Richtung  $HF$  das Gleichgewicht halten muß, so ist

$$\frac{V - V'}{\operatorname{tg} \beta} = \mu V' \text{ oder } V = (1 + \mu \operatorname{tg} \beta) V'.$$

Wird nun statt  $V'$  der vorhin gefundene Werth gesetzt, so erhält man die Kraft, welche zur Ueberwältigung der Last  $Q$  und der Reibungen an den Scheidelatten und dem Daumen erfordert wird, oder

$$(I) \quad V = \frac{(c + 2\mu b)(1 + \mu \operatorname{tg} \beta)}{(1 - \mu^2)c + 2\mu^2 e} Q$$

und wenn  $f$  die Kraft bezeichnet, welche nach der Richtung  $AH$  angebracht, lediglich den Reibungen an den Scheidelatten und am Daumen das Gleichgewicht hält, so ist  $V = f + Q$ , also  $f = V - Q$ , man fin-

det daher die zur Ueberwältigung der Reibungen erforderliche Kraft

$$(II) \quad f = \mu \frac{2b + \mu(c - 2e) + (c + 2\mu b) \operatorname{tgt} \beta}{(1 - \mu^2)c + 2\mu^2 e} Q.$$

Da nun  $e$  und  $\beta$  veränderliche Größen sind, welche von der Lage der Stampfer abhängen, so ist auch die Kraft  $f$  veränderlich. Um die Kraft  $f$  lediglich von der Veränderlichkeit des Winkels  $\angle AGH = \beta$  abhängig zu machen, ziehe man  $GA'$  horizontal, und setze den vertikalen Abstand der untern Scheidelatte  $N'$  von der Horizontale durch den Mittelpunkt  $G$  der Welle oder  $N'A' = k$ , so ist, wenn der Halbmesser  $AG = a$  ist

$A'F = AH = a \operatorname{tgt} \beta$ , also  $e = k + a \operatorname{tgt} \beta$ . Diesen Werth statt  $e$  in die obige Gleichung gesetzt, giebt

$$(III) \quad f = \mu \frac{2b + \mu(c - 2k) + (c - 2\mu^2 a - 2\mu b) \operatorname{tgt} \beta}{(1 - \mu^2)c + 2\mu^2(k + a \operatorname{tgt} \beta)} \cdot Q.$$

Will man statt  $\beta$  den größten Winkel in Rechnung bringen, bei welchem der Daumen den Zapfen verläßt, und man setzt, daß die größte Höhe, auf welche der Zapfen gehoben wird, oder  $AH = h$  ist, so erhält man  $a \operatorname{tgt} \beta = h$ , oder wenn  $\frac{h}{a}$  statt  $\operatorname{tgt} \beta$  in Rechnung gebracht wird, so ist

$$(IV) \quad f = \mu \frac{2ab + \mu a(c - 2k) + (c - 2\mu a - 2\mu b) h}{(1 - \mu^2)ac + 2\mu^2 a(k + h)} \cdot Q.$$

Die vorstehenden vier Ausdrücke gelten aber nur unter der Voraussetzung, daß  $bQ > \mu e V'$  ist, oder wenn für  $V'$  und  $e$  die gefundenen Werthe gesetzt wer-

den, so muß  $bQ > \frac{\mu(k + a \operatorname{tgt} \beta)(c + 2\mu b)Q}{c - \mu^2(c - 2k - 2a \operatorname{tgt} \beta)}$  seyn, dies giebt

$$\frac{(1 - \mu^2)b - \mu k}{\mu a} > \operatorname{tgt} \beta$$

welches die Bedingung ist, unter der die vorstehenden Ausdrücke anwendbar sind.

§. 283.

Zusatz. Wäre mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung  $q' > p'$ , so ist der Druck bei den obern Scheidelatten  $q' - p'$ , also die gesammte Reibung an den Scheidelatten

$$\mu(q' - p' + p'' + q'') = \mu^2 V', \text{ also}$$

$$V' = Q + \mu^2 V' \text{ daher } V' = \frac{Q}{1 - \mu^2}.$$

Da nun  $V = (1 + \mu \operatorname{tgt} \beta) V'$ , so erhält man die zur Ueberwältigung der Last  $Q$  und der Reibungen erforderliche Kraft

$$(I) \quad V = \frac{1 + \mu \operatorname{tgt} \beta}{1 - \mu^2} Q.$$

Hiebei ist die Voraussetzung  $q' > p'$  oder  $\frac{\mu e V'}{c} > \frac{bQ}{c}$

oder  $\frac{\mu e}{1 - \mu^2} > b$ . Nun ist  $e = k + a \operatorname{tgt} \beta$ , daher erhält man für die Fälle, wo der vorstehende Ausdruck anwendbar ist

$$\operatorname{tgt} \beta > \frac{(1 - \mu^2)b - \mu k}{\mu a}.$$

Weil ferner  $f = V - Q$ , so erhält man die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft

$$(II) \quad f = \frac{\mu(\mu + \operatorname{tgt} \beta)}{1 - \mu^2} Q.$$

Aus der Vergleichung des hier für  $V$  gefundenen Werths mit dem im vorigen §. ergibt sich, daß hier  $V$ , also auch die Reibung kleiner wird. Es muß daher bei der Anordnung der Stampfer dahin gesehen werden, daß

$$\operatorname{tgt} \beta > \frac{(1 - \mu^2) h - \mu k}{\mu a}$$

werde, d. h. man muß die Länge  $h$  des Hebezapfens möglichst klein, den Halbmesser vom Theilkreise möglichst groß, und eben so den Abstand der untern Scheidelatten von derjenigen Horizontallinie, welche durch den Mittelpunkt der Daumenwelle geht, möglichst nach unten zu vergrößern.

#### §. 284.

Die Bedingungen, unter welchen die §. 280. gegebene Anordnung der Daumen anwendbar ist, bestehen vorzüglich darin, daß die Erhebungshöhe  $h$  genau in den Umfang  $2\pi a$  des Theilkreises aufgehe, und daß, wenn eine von den Größen  $a$ ,  $h$ ,  $l$  gegeben ist (wo  $l$  die Daumenlänge vom Mittelpunkte der Welle bezeichnet), die beiden übrigen daraus bestimmt werden müssen. Gewöhnlich ist  $h$  gegeben, alsdann darf weder  $a$  noch  $l$  willkürlich angenommen werden, weil beide Abmessungen durch die Natur der Kreisevolvente mittelst  $h$  und der Anzahl  $n$  der Daumen bestimmt sind. Wenn sich hingegen der Fall ereignet, daß zwei von den Größen  $a$ ,  $h$ ,  $l$  gegeben sind, so kann man zwar leicht durch Zeichnung eines rechtwinklichten Dreiecks oder durch Rechnung (§. 280. II.) die dritte Größe

finden, allein dann hängt es vom Zufalle ab, ob  $h$  in  $2\pi a$  genau aufgeht, welches doch erfordert wird, weil, Figur 150., der abgewickelte Bogen  $AM$  der Erhebungshöhe  $AH$  gleich seyn muß. Taf. IX.  
Fig. 150.

Man nenne den Bogen  $AM$  des Theilkreises, welcher durch den Punkt  $A$  geht, während ein Daumen den Hebezapfen auf die Höhe  $AH$  hebt, die Theilung der Daumen. Wäre diese größer oder kleiner als die Höhe  $AH$ , so läßt sich auch die Kreisevolvente zur Bestimmung der Gestalt der Daumen nicht anwenden, und man muß für die Daumen eine andere Kurve auffuchen, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man die Theilung der Daumen in eben so viel gleiche Theile wie die Erhebungshöhe eintheilt, alsdann in gleichen Zeiten gleich viel Theile der Theilung und der Erhebungshöhe durchlaufen werden, weil nur unter dieser Bedingung in jeder Lage der Zapfen gleiche Kraft am Umfange des Theilrisses erfordert wird.

§. 285.

**Aufgabe.** Zum vertikalen Erheben einer Last (eines Hebezapfens) ist die Erhebungshöhe  $AF$ , Figur 153., nebst der Theilung der Daumen  $AM = AF'$  und dem Halbmesser  $AC$  des Theilkreises gegeben, man soll die erforderliche Gestalt der Daumen finden. Taf. X.  
Fig. 153.

**Auflösung.** Man theile die Höhe  $AF$  in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile  $AB, BD, DE, EF$  (je mehr je besser), und in eben so viel gleiche Theile  $AB', B'D', D'E', E'F'$  den Bogen  $AF'$ . Durch die Punkte  $B, D, E, F$  ziehe man die Linien  $CB, CD,$



CE, CF, und nehme  $B'b' = Ab$ ;  $D'd' = Ad$ ;  $E'e' = Ae$ ;  $F'f' = Af$ , schlage aus C die Bogen  $BB'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ , bis solche die verlängerten Linien  $Cb'$ ,  $Cd'$ ,  $Ce'$ ,  $Cf'$  in  $B'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  schneiden, ziehe durch diese Punkte die Kurve  $AB'D'E'F'$ , so ist solche die erforderliche Rundung des Daumen.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehen; denn angenommen, daß der Punkt  $B'$  nach A kommt, so fällt  $b'$  auf  $b$ , also  $B'$  auf  $B$ , daher ist von der Theilung ein Bogen  $AB'$  durch A gegangen oder abgewickelt worden, indem die Last auf die Höhe  $AB$  gestiegen ist. Kommt  $D'$  nach A, so fällt  $D'$  auf  $D$ , und es sind zwei Bogen  $AB'$  durch A gegangen, indem die Last auf zwei Theile wie  $AB$  gehoben ist. Ueberhaupt folgt aus der Konstruktion, daß wenn in irgend einer Zeit eine Anzahl Theile wie  $AB'$  durch A gehen, in eben der Zeit die Last um eben so viel Theile wie  $AB$  gehoben wird. Setzt man die Höhe  $AF = h$ , und die Theilung  $AF' = t$ , so verhält sich  $AB : AB' = h : t$ , oder wenn man den Weg, welchen ein Punkt des Theilrisses durchläuft, den Weg der Kraft, und die zugehörige Höhe, auf welche die Last gehoben worden, den Weg der Last nennt, so verhält sich der Weg der Kraft, zum Wege der Last, wie  $t$  zu  $h$ .

Die nach der Richtung  $AF$  zu hebende Last sey  $= Q$ , und die für irgend eine Lage des Daumen zur Erhaltung des Gleichgewichts am Umfange des Theilrisses nöthige Kraft  $= P$ , so wird nach dem Grund-

Verf. der Statik §. 69. erfordert, daß sich verhält:  
 $P : Q = h : t$ , es muß daher  $P = \frac{hQ}{t}$  seyn. Da  
 nun  $h, t, Q$  unveränderliche Größen sind, so wird auch  
 zur Erhaltung der Last  $Q$  in allen Lagen des Dau-  
 men einerlei Kraft  $P$  am Umfange des Theilkreises er-  
 ordert.

§. 286.

Zusatz. Wäre die Last  $Q$  nicht am Ende des  
 wagerechten Halbmessers  $CA$  in  $A$ , Figur 153., an- Taf. X.  
 gebracht, sondern sollte in irgend einem andern Punkte Fig. 153.  
 des Theilkreises oberhalb  $CA$  vertikal aufwärts geho-  
 ben werden, so darf man nur ein ganz ähnliches Ver-  
 fahren wie im vorigen §. beobachten, um die nöthige  
 Rundung des Daumen zu finden. Figur 154. wird Fig. 154.  
 dies näher erläutern. Auch in dem Falle, wenn  $AF$   
 nicht vertikal ist, sondern irgend eine willkürliche Rich-  
 tung hat, wird ein ähnliches Verfahren beobachtet.

Fällt die Erhebungshöhe  $AF$  in die Verlänge-  
 rung des vertikalen Halbmessers  $AC$  vom Theilkreise,  
 wie Figur 155., so wird dadurch die Konstruktion noch  
 mehr vereinfacht, wie solches leicht aus dem Vorher-  
 gehenden und der angeführten Figur 155. erhellet. Fig. 155.  
 Die Kurve  $AB''D''E''F''$  ist alsdann eine archimedische  
 Spirallinie (§. 56. Anhang).

§. 287.

Aufgabe. Eine Last soll mittelst eines Daumen  
 von einem gegebenen Punkte  $A$ , Figur 156., des Theil- Fig. 156.  
 kreises nach irgend einer Richtung von  $A$  bis  $F$  be-

wegt, und nach der entgegengesetzten Richtung von F bis A auf dem Daumen wieder herabsinken. Man sucht die erforderliche Gestalt des Daumen.

**Auflösung.** Es sey CA der gegebene Halbmesser des Theilkreises, und  $AF'A'$  die gegebene Theilung des Daumen. Man theile den Bogen  $AF'A'$  in zwei Theile  $AF' = F'A$ , so daß  $AF'$  als Theilung für den Vordertheil  $AN''F''$ , und  $F'A'$  als Theilung für den Hintertheil  $F''D''A'$  des ganzen Daumen angenommen wird. Mit Hülfe der Theilung  $AF'$  und der Höhe  $AF$  kann man nach §. 286. die Vorder- und die Hinterrundung  $AN''F''$  des Daumen beschreiben. Um nun ebenfalls die Hinterrundung  $F''D''A'$  anzugeben, zu welcher die Theilung  $F'A'$  gehört, werde  $AF$  in eben so viel gleiche Theile  $AB, BD, DE, EF$ , wie  $FA'$  in die gleichen Theile  $A'B', B'D', D'E', E'F'$  eingetheilt. Man ziehe durch die Punkte B, D, E, F die Linien CB, CD, CE, CF, und nehme  $B'b' = Ab$ ;  $D'd' = Ad$ ;  $E'e' = Ae$ ;  $F'f' = Af$ ; schlage aus C die Bogen  $BB', DD', EE', FF''$ , bis solche die verlängerten Linien  $Cb', Cd', Ce', Cf'$  in  $B', D', E', F''$  schneiden; ziehe durch diese Punkte die Kurve  $A'B''D''E''F''$ , so ist solche die gesuchte Hinterrundung des Daumen, auf welcher die Last nach der Richtung FA eben so herabsinkt, wie sie auf  $AN''F''$  nach der Richtung AF gehoben wird.

Denn sobald der Punkt  $F'$  nach A kommt, so fällt  $F''$  auf F. Geht  $E'$  nach A, so muß  $E'$  auf E fallen u. s. w., daher so oft ein Bogen des Theilkrei-

ses  $= A'B'$  durch den Punkt A geht, wird die Last einen Weg  $= AB$  durchlaufen.

Wäre der ganze Umfang des Theilkreises als Theilung für den Daumen gegeben, und die Richtung der Last fiel in die Verlängerung des vertikalen Halbmessers vom Theilkreise, so wird der Umfang des Daumen eine symmetrische herzförmige Gestalt erhalten, wie Figur 157.

Kaf. X.  
Fig. 157.

§. 288.

**Aufgabe.** An einem Hebelsarme AG, Figur 158., welcher um den festen Punkt G beweglich ist, wirkt eine Last Q' vertikal abwärts, so daß in allen Lagen des Hebels GA, der vertikale Druck auf den Punkt A desselben gleich groß bleibt. Man soll die Gestalt eines Daumen angeben, damit die auf das Ende A des Hebels GA wirkende Last, in allen Lagen des Daumen durch einerlei Kraft am Umfange des Theilkreises im Gleichgewichte erhalten wird.

Fig. 158.

**Auflösung.** Der Halbmesser des Theilrisses sey AC, die Theilung für den Daumen AF', und der Bogen, welchen der Punkt A des Hebels bis zu seiner größten Höhe beschreiben muß, ADF. Man ziehe die Sehne AF, theile solche in die gleichen Theile A,1; 1,2; 2,3; 3,F, und in eben so viel gleiche Theile AB', B'D', D'E', E'F' werde die Theilung AF' getheilt. Durch die Punkte 1, 2, 3, ziehe man bis an den Bogen AF, die Horizontallinien 1B, 2D, 3E, und aus C die Linien CB, CD, CE, CF. Nehme  $B'b' = Ab$ ;  $D'd' = Ad$ ;  $E'e' = Ae$ ;  $F'f' = Af$ ,

schlage aus  $C$  die Bogen  $BB'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ , bis solche die verlängerten Linien  $Cb'$ ,  $Cd'$ ,  $Ce'$ ,  $Cf'$  in  $B'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  schneiden; ziehe durch diese Punkte die Kurve  $AB'D'E'F'$ , so ist solche die gesuchte Rundung des Daumen.

Um zu übersehen, daß  $AD'F'$  die erforderliche Gestalt des Daumen ist, ziehe man die Vertikallinien  $1I$ ,  $2II$ ,  $3III$ ,  $4IV$ ; kommt alsdann  $B'$  nach  $A$ , so ist die Last am Ende des Hebels um die vertikale Höhe  $1I$  gestiegen. Kommt  $D'$  nach  $A$ , so ist die Last auf die vertikale Höhe  $2II$ , oder auf die doppelte Höhe  $1I$  gehoben, u. s. w. Ist daher die am Ende des Hebels vertikal abwärts wirkende Last  $= Q$ , und die zur Erhaltung des Gleichgewichts am Umfange des Theilrisses erforderliche Kraft  $= P$ , so sind  $1I$ ,  $2II$  u. s. w. die Wege der Last, wenn  $AB'$ ,  $AD'$  u. s. w. die Wege der Kraft darstellen. Man setze die ganze Höhe  $4IV = h$ , und die Theilung  $AF' = t$ , so verhalten sich die Wege der Last zu den zugehörigen Wegen der Kraft allemal wie  $h$  zu  $t$ . Nach §. 69. erfordert aber das Gleichgewicht, daß  $Qh = Pt$  sey, daher ist die Kraft

$$P = \frac{Qh}{t}$$

für alle Lagen des Daumen gleich groß, und die Last wird mit unveränderter Kraft in allen Lagen des Daumen im Gleichgewicht erhalten.

§. 289.

1. Zusatz. Sucht man die Gestalt vom Hintertheile des Daumen, damit die Last  $Q$  auf demselben

eben so wieder herabsinke, wie solche aufgehoben wird, so sey, Figur 158.,  $F'A'$  die Theilung für den Hintertheil des Daumen, und  $A'B''$ ,  $B''D''$ ,  $D''E''$ ,  $E''F'$  Taf. X.  
gleich groß. Man nehme Fig. 158.

$B''b'' = Ab$ ;  $D''d'' = Ad$ ;  $E''e'' = Ae$ ;  
verfahre auf eine ähnliche Art wie §. 287., so ist  $AD'F''$  die gesuchte Rundung.

§. 290.

2. Zusatz. Fällt die Sehne  $AF$  des Bogens  $ADF$  in die Verlängerung des vertikalen Halbmessers  $CA$ , wie Figur 159., und der ganze Umfang des Theilkreises soll als Theilung für die Vorder- und Hinterrundung des Daumen angenommen werden, so lassen sich diese Rundungen auf eine ähnliche Art wie in den vorhergehenden §. §. finden. Alsdann ist aber nicht wie §. 287., Figur 157., die Rundung  $AD''F''$  der Rundung  $AD'F''$ , Figur 159., gleich, wie man sich leicht überzeugen kann. Fig. 159. Fig. 157.

§. 291.

3. Zusatz. Wäre in dem Punkt  $H$ , Figur 158., des Hebels  $GA$ , wo die Last  $Q'$  am Faden  $HL$  frei herabhängt, mit dem Hebel ein Kreisbogen  $HK$  verbunden, dessen Mittelpunkt in  $G$  liegt, so daß bei der Aufwärtsbewegung des Hebels  $GA$  der Faden  $HL$  sich um den Bogen  $HK$  herum legt, so wird, wenn  $K$  nach  $H$  kommt, die Last  $Q'$  um den Weg  $KH$  aufwärts gestiegen seyn. Der Weg der Last  $Q'$  ist also hier ein Bogen, und die davon am Ende des Hebels in  $A$  herrührende Last  $Q$  hat den Bogen  $ADF$  Fig. 158.

als zugehörigen Weg der Last beschrieben. In diesem Falle muß zur Bestimmung der Gestalt der Daumen, nicht die Sehne  $AF$ , sondern der Bogen  $ADF$  in die gleichen Theile  $AB$ ,  $BD$ ,  $DE$ ,  $EF$  getheilt, und übrigens wie §. 288. und 289. verfahren werden.

§. 292.

Kaf. X.  
Fig. 160.

**Aufgabe.** Ein Hebel  $AG$ , Figur 160., welcher um den festen Punkt  $G$  beweglich ist, und an dessen Ende in  $A$  eine Last  $Q$  vertikal abwärts wirkt, soll von einer um den festen Punkt  $C$  beweglichen Stange  $CA'$  so aufgehoben werden, daß in allen Lagen der Stange  $CA'$  gleiche Kraft an derselben erfordert wird, um der Last  $Q$  das Gleichgewicht zu halten; man verlangt die erforderliche Gestalt des Hebels, damit solcher durch die Stange  $CA'$  um irgend einen Bogen  $AF$  gehoben und wieder herabgelassen wird, während der Punkt  $A'$  der Stange  $A'C$  den Bogen  $A'F'A''$  durchläuft.

**Auflösung.** Man nehme den Bogen  $A'F' = F'A''$ , theile die Sehne  $AF$  in eine gewisse Anzahl gleicher Theile  $A1$ ;  $1,2$ ;  $2,3$ ;  $3,F$ ; und in eben so viel gleiche Theile  $A'B'$ ,  $B'D'$ ,  $D'E'$ ,  $E'F'$ , werde der Bogen  $A'F'$  und  $A''F'$  eingetheilt; durch die Punkte  $1, 2, 3$  ziehe man die Horizontallinien  $1B$ ,  $2D$ ,  $3E$  bis an den Bogen  $AF$ ; ziehe aus  $G$  die Linien  $CB$ ,  $CD$ ,  $CE$ , und beschreibe aus  $G$  durch  $B'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  die Bogen  $B'b'$ ,  $D'd'$ ,  $E'e'$ ,  $F'f'$  unbestimmt lang; nehme alsdann  $B'B'' = bb'$ ,  $D'D'' = dd'$ ;  $E'E'' = ee'$ ;  $F'F'' = ff'$  und ziehe durch die Punkte  $A'B''D''E''F''$  und  $F''E''D''B''A''$ .

die Kurven  $A'D''F'$  und  $F'D'A''$ , so geben diese die Gestalt, welche der Theil  $A'A''$  des Hebels erhalten muß, damit solcher durch die Stange  $CA'$ , wenn sie den Bogen  $A'F'A''$  durchläuft, den Bedingungen gemäß auf und nieder bewegt werde.

Der Grund dieses Verfahrens ist sogleich aus der Konstruktion zu ersehen. Denn wenn der Punkt  $A'$  der Stange  $A'C$  nach  $B'$  kommt, so fällt der Punkt  $B''$  auf  $B'$  und  $b'$  auf  $b$ . Ist nun die Kraft, welche die Stange  $A'C$  umtreibt, winkelrecht auf  $A'C$  in  $A$  angebracht, so hat die Kraft den Weg  $A'B'$ , und die Last den Weg  $1I$  nach vertikaler Richtung durchlaufen. Kommt  $A'$  nach  $D'$ , so fällt  $D''$  auf  $D'$  und  $d''$  auf  $d$ ; alsdann hat die Kraft den Weg  $A'D' = 2 \cdot A'B$ , und die Last den doppelten Weg  $1I$  nach vertikaler Richtung durchlaufen, woraus wie §. 285. folgt, daß zur Erhebung des Hebels  $GA$  in allen Lagen desselben einerlei Kraft am Ende der Stange  $CA'$  erforderlich ist.

Hier gelten übrigens eben die Bemerkungen wie §. 291.

#### §. 293.

**Aufgabe.** Ein Hebel oder Balancier  $AK$ , Figur 161., welcher um den festen Punkt  $G$  bewegt werden kann, und an dessen Ende  $K$  eine Last  $Q$  vertikal herabhängt, soll mittelst der Erhöhungen und Vertiefungen eines horizontalen Rades  $BD$  so bewegt werden, daß das Ende  $A$  des Hebels durch die Umdrehung des Rades wechselseitig heruntergedrückt wird und

Taf. X.  
Fig. 161.



wieder aufsteigen kann. Man soll die erforderliche Gestalt der Einschnitte des Rades auf einer Ebene angeben.

**Auflösung.** Vorausgesetzt, daß der Hebel  $AK$  in eine Vertikalebene fällt, welche den Umfang des horizontalen Rades berührt, und daß in dieser Ebene die Einschnitte des Rades gezeichnet werden, so sey, Figur Taf. X. 162.,  $A$  der höchste und  $F$  der niedrigste Punkt für Fig. 162. das Ende des Hebels. Durch  $F$  ziehe man die Horizontale  $F'F''$ , und darauf winkelrecht die Linie  $Af$ . Ist nun die Theilung oder der Abstand zweier Vertiefungen am Umfange des Rades gegeben oder willkürlich angenommen, so trage man die Hälfte der Theilung von  $f$  nach  $f'$  und von  $f$  nach  $f''$ , theile  $Af$  in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile  $Ab$ ,  $bd$ ,  $de$ ,  $ef$ , und in eben so viel gleiche Theile die Weite  $ff'$  und  $ff''$ . Durch diese Theilungspunkte ziehe man mit  $Af$  und  $f'f''$  parallele Linien, welche das Rechteck  $f'a'a''f''$  bilden, und nehme

$$b'B' = b''B'' = bB; \quad d'D' = d''D'' = dD;$$

$$e'E' = e''E'' = eE; \quad f'F' = f''F'' = fF;$$

ziehe durch die Punkte  $AB'D'E'F'$  und  $AB''D''E''F''$  die Kurven  $AD'F'$  und  $AD''F''$ , so bilden solche den gesuchten Einschnitt auf einer Ebene, welche vertikal um das Rad gelegt, die erforderliche Gestalt der Erhöhungen und Vertiefungen angeben.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich daraus beurtheilen, wenn man sich vorstellt, daß das Ende  $A$  des Hebels in die Punkte  $B$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , und auf diese

die Punkte  $B'$ ,  $B''$ ;  $D'$ ,  $D''$  u. s. w. fallen. Fällt z. B.  $A$  auf  $B$ , so muß  $B'$  auf  $B$  fallen; alsdann ist  $A$  um den Theil  $Ab$  gesunken, und das Rad um den Theil  $BB' = bb' = Aa$  fortgerückt. Fällt  $A$  auf  $D$ , also  $D'$  auf  $D$ , so ist  $A$  um den Theil  $2 \cdot Ab$  gesunken, und das Rad um den Theil  $2 \cdot Aa$  fortgerückt. Hieraus folgt, wie §. 285., daß am Umfange des Rades einerlei Kraft der Last  $Q'$  in allen Lagen des Hebels das Gleichgewicht hält.

§. 294.

Die schicklichste Gestalt der Zähne eines Rades hat zuerst Römer, ein dänischer Astronom, angegeben. Die wichtigsten Schriften, in welchen man Untersuchungen über die Gestalt der Zähne, Rämme und Daumen findet, enthält das nachstehende Verzeichniß, welches nach der Zeitfolge geordnet ist:

*de la Hire*, Traité des Epicycloïdes et de leurs usages dans les Mécaniques. Mém. de l'acad. de Paris. Depuis 1666 jusqu'à 1699. Tome IX. p. 223—294.

*Camus*, sur la figure des Dents, des Roues et des Ailes des Pignons, pour rendre les Horloges plus parfaites. Mém. de l'Acad. de Paris, Année 1733. p. 165—197. ed. Amst.

*de Parcieux*, Mémoire sur la manière de tracer mécaniquement la courbure qu'on doit donner aux ondes, dans les machines pour mouvoir des leviers ou balanciers, au lieu des ovales qu'on a substitués aux manivelles en plusieurs endroits. Mém. de l'acad. de Paris, Année 1747. p. 359—382. ed. Amst.

*Camus*, Cours des Mathématique. Troisième Partie. Elémens de Méchanique statique. Tome II. à Paris 1752. p. 305—428.

**L. Euler**, De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda. Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. V. ad Annum 1754 et 1755. p. 299—316.

**L. Euler**, Supplementum. De figura dentium rotarum. Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. XI. pro Anno 1765. p. 207—231.

**A. G. Kaestner**, De rotarum dentibus. Comment. Soc. Scient. Gottingens. Tom. IV. ad A. 1781. p. 1—25.

**A. G. Kaestner**, De dentibus rotarum qui inguntur paxillis rotundis. Comment. soc. sc. Gotting. T. V. ad A. 1782. p. 1—27.

## Elftes Kapitel

### Von den gespannten Seilen.

#### I. Von der Seilmaschine.

§. 295.

Die Verbindung mehrerer Seile oder Fäden unter einander, um daran Kräfte ins Gleichgewicht zu bringen, heißt eine Seilmaschine (*Machine funiculaire*).

Wenn bei der Untersuchung dieser Maschine keine Erinnerung beigefügt ist, so wird man voraussetzen, daß die Seile vollkommen biegsam, unausdehnbar und ohne Schwere sind, und daß die Richtungen aller Kräfte in einerlei Ebene fallen.

Befestigt man einen Faden an einem Ende und läßt an dem andern Ende desselben eine Kraft  $T$  wirken, so wird er nach seiner Länge ausgespannt, und wenn man ihn an irgend einem Orte durchschneidet, so erfordert das Gleichgewicht mit der Kraft  $T$ , daß eine eben so große Kraft nach entgegengesetzter Richtung angebracht werde. Diese Kraft  $T$  heißt die **Spannung** (*Tension*) des Fadens. Sie ist für den ganzen Faden einerlei und jeder Querschnitt desselben wird mit einer Kraft  $T$  ausgedehnt.

Denjenigen Punkt in welchem mehrere Seile vereinigt sind, nennt man einen **Knoten** (*Noeud*). Dieser Knoten ist **fest** (*fixe*), wenn die Seile im Vereinigungspunkte nicht verschoben werden können; **beweglich**, (*coulant*) wenn ein oder mehrere Seile mittelst eines verschiebbaren Ringes, mit den übrigen Seilen verbunden sind.

## §. 296.

Sind drei Seile  $CP$ ,  $CQ$ ,  $CR$ , Figur 163., in einem Knoten vereinigt, und an den Enden eines jeden Seils wirken Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , so lassen sich leicht die Bedingungen für das Gleichgewicht angeben, weil hier die allgemeinen Sätze §. 19. ihre unmittelbare Anwendung finden. Setzt man die Winkel  $PCR = \gamma$ ,  $PCQ = \delta$  und  $QCR = \eta$ , so erhält man nach §. 19., weil daselbst  $\alpha + \beta = \delta$ ,  $\alpha = 180^\circ - \gamma$ ,  $\beta = 180^\circ - \eta$  ist,  $\sin \alpha = \sin \gamma$ ,  $\sin \beta = \sin \eta$ ;  $\cos \alpha = -\cos \gamma$ ,  $\cos \beta = -\cos \eta$  und weil  $\sin \gamma$

Taf. XI.  
Fig. 163.

$= -\sin(\delta + \eta)$ ,  $\sin \delta = -\sin(\gamma + \eta)$  und  $\sin \eta = -\sin(\gamma + \delta)$  ist, so findet man

$$P = \frac{Q \sin \eta}{\sin \gamma} = \frac{R \sin \eta}{\sin \delta} = -\frac{Q \sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma}$$

$$Q = \frac{P \sin \gamma}{\sin \eta} = \frac{R \sin \gamma}{\sin \delta} = -\frac{P \sin(\delta + \eta)}{\sin \eta}$$

$$\cos \delta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$$

$$\cos \gamma = \frac{Q^2 - P^2 - R^2}{2PR}$$

$$\cos \eta = \frac{P^2 - Q^2 - R^2}{2QR}$$

u. s. w.

Es können daher jedesmal, wenn von den sechs Größen  $P, Q, R, \gamma, \delta, \eta$ , drei gegeben sind, die übrigen bestimmt werden. Hieraus erhält man

$$P : Q = \sin \eta : \sin \gamma \text{ und } Q : R = \sin \gamma : \sin \delta \text{ also}$$

$$P : Q : R = \sin \eta : \sin \gamma : \sin \delta$$

d. h. wenn drei Kräfte mittelst Seile an einem Knoten im Gleichgewichte sind, so muß sich jede dieser Kräfte wie der Sinus des Winkels verhalten welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte einschließen.

### §. 297.

**Aufgabe.** Die Länge des Seils  $ACB$ , Figur Taf. XI. 164., nebst der Lage der beiden Endpunkte  $A$  und  $B$  wo dasselbe befestigt werden soll, sind gegeben. Mittelst eines längs diesem Seile beweglichen Ringes ist ein Gewicht  $Q$  aufgehängt. Man sucht den Ort  $C$  wo dieser Ring in Ruhe ist.

**Auflösung.** Man ziehe durch einen der beiden

Punkte A, B, hier etwa durch B, die Vertikale BE. Trage aus A die gegebene Länge des Seils bis E, ziehe AE und nehme  $EF = FB$ , so wird die auf BE winkelrechte Linie FC die Linie AE in C schneiden, wodurch der Punkt C für den Ort des Ringes gefunden ist. Da nun  $CB = CE$  und AE die gegebene Länge des Seils ist, so ist auch  $AE = AC + CB$ .

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehen, wenn man erwägt daß das Seil ACB durch den Ring C frei durchgeht, daß daher die Spannung des Seils durchgängig gleich groß seyn muß, weil sonst der Ring nicht in Ruhe bleiben kann. Sobald aber die Spannung des Seils CA der Spannung des Seils CB gleich ist, so müssen auch, wenn CG vertikal gezogen wird, die Winkel ACG und GCB einander gleich seyn. Hieraus erläutert sich die gegebene Auflösung, weil der Winkel  $CEB = EBC = ACG = GCB$  ist.

## §. 298.

Zusatz. Wollte man aus der gegebenen Lage der Punkte A, B und aus der Länge des Seils nebst dem Gewicht Q, die Lage des Punkts C und die Spannung des Seils durch Rechnung finden, so setze man den Horizontalabstand  $AD = a$ , den Vertikalabstand  $DB = b$ , die Länge des Seils  $ACB = L$ ; ferner  $AG = x$ ,  $GC = y$ , den Winkel  $ACB = \varphi$  und die Spannung des Seils  $ACB = T$ . Alsdann ist der Winkel  $ACG = \frac{1}{2} \varphi = AED$ , also

$\sin AED = \frac{AD}{AE}$  oder  $\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{a}{L}$  und  
 $\cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - a^2}}{L}$ , folg-  
 lich §. 21. I. die Spannung  $T = \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2} \varphi}$  oder

$$(I) \quad T = \frac{Q \cdot L}{2 \sqrt{L^2 - a^2}}.$$

Für  $L = a$  wird  $T = \infty$  oder es wird eine unend-  
 liche Kraft erfordert, das Seil zwischen den beiden in  
 einerlei Horizonte liegenden Punkten A und B grade  
 zu spannen. Je weniger L von a verschieden ist, desto  
 größer wird die Spannung, und man sieht hieraus wie  
 sehr die Kraft T durch die Verkürzung der Länge des  
 Seils vermehrt werden kann.

Man verlängere AD und CB bis H so ist

$$CH = CA = \frac{AG}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{L \cdot x}{a}$$

$$HB = \frac{BD}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{L \cdot b}{\sqrt{L^2 - a^2}}, \text{ also}$$

$$AC + CH - HB = \frac{2L \cdot x}{a} - \frac{L \cdot b}{\sqrt{L^2 - a^2}} = L$$

und hieraus AG oder

$$(II) \quad x = \frac{1}{2} a + \frac{ab}{2 \sqrt{L^2 - a^2}}.$$

Ferner ist  $\cot \frac{1}{2} \varphi = \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - a^2}}{a}$  und  $CG$   
 $= AG \cot \frac{1}{2} \varphi$  oder  $y = x \cot \frac{1}{2} \varphi$ , daher C oder

$$(III) \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - a^2} + \frac{1}{2} b.$$

Beispiel. An einem 16 Fuß langen Seile soll mit-  
 telst eines Ringes eine Last von 100 Pfund aufgehängt  
 werden. Der Horizontalabstand von den Enden des Seils  
 ist 12 und der Vertikalabstand 2 Fuß. Man sucht die

Spannung des Seils und den Ort wo die Last in Ruhe bleibt. Hier ist  $a = 12$ ,  $b = 2$ ,  $L = 16$  Fuß und  $Q = 100$  Pfund; daher

$$\text{die Spannung } T = \frac{16 \cdot 100}{2\sqrt{(256-144)}} = 75,59 \text{ Pfund}$$

$$\text{der Horizontalabstand } AG \text{ oder } x = \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{12 \cdot 2}{2\sqrt{(256-144)}} \\ = 6 + 1,134 = 7,134 \text{ Fuß}$$

$$\text{der Vertikalabstand } DB \text{ oder } y = \frac{1}{2} \sqrt{(256-144)} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 6,292 \text{ Fuß.}$$

§. 299.

**Aufgabe.** An einem Knoten C, Figur 165., Taf. XI. sind drei Seile befestigt, wovon zwei mit den daran befindlichen Gewichten P, Q über die Rollen A, B hängen. Am dritten Seile hängt die Last R frei herunter; man fragt welche Lage der Knoten C der Seilmaschine annehmen wird, wenn die Gewichte P, Q, R nebst der Lage der Rollen A und B gegeben sind. Fig. 165.

**Auflösung.** In derselben Ebene, in welcher sich die Seile befinden, beschreibe man ein Dreieck abc, dessen Seite ab vertikal ist, indem man

$$ab : ac : bc = R : P : Q$$

annimmt. Zieht man alsdann AC mit ac und BC mit cb parallel, so ist der Durchschnittspunkt C der Ort für den Knoten.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich einsehen, wenn man die vertikale Richtung des Gewichts R nach CD verlängert, und das Parallelogramm DECF beschreibt. Nun sind nach §. 17. die Kräfte R, P, Q nur dann im Gleichgewichte, wenn sich verhält

$$CD : DF : FC = R : P : Q.$$



Es müssen daher auch die Dreiecke  $DFC$  und  $aob$  einander ähnlich seyn, folglich hat der Punkt  $C$  die für das Gleichgewicht erforderliche Lage.

§. 300.

**Aufgabe.** Die Größe dreier Kräfte  $P, Q, R$ , welche an dem Knoten einer Seilmaschine wirken und die Lage dreier Punkte  $A, B, C$ , Figur 166., ist gegeben. Man soll die Lage des Knotens bestimmen, damit die Richtungen der Kräfte  $P, Q, R$  durch die Punkte  $A, B, C$  gehen, und die Kräfte selbst untereinander im Gleichgewichte sind.

Kaf. XI.  
Fig. 166.

**Auflösung.** Man ziehe  $AB$  und nehme

$$R : Q : P = AB : AD : BD.$$

Mit den gefundenen Linien werde das Dreieck  $ABD$  beschrieben und durch die Punkte  $A, B, D$  ein Kreis geschlagen. Durch  $C$  und  $D$  ziehe man  $DC$ , so ist da wo diese Linie die Peripherie des Kreises in  $G$  schneidet, die Stelle des Knoten, und  $GA, GB, GC$  sind die Richtungen der Kräfte  $P, Q, R$  für das Gleichgewicht, welche durch die gegebenen Punkte  $A, B, C$  gehen.

**Beweis.** Man setze den Winkel  $AGD = \alpha$ ,  $BGD = \beta$ , so ist  $AGD = ABD = \alpha$ ,  $BGD = BAD = \beta$ , weil diese Winkel auf einerlei Bogen im Kreise stehen. Aber im Dreiecke  $ABD$  verhält sich

$$BD : AD = \sin BAD : \sin ABD \text{ oder}$$

$$P : Q = \sin \beta : \sin \alpha, \text{ daher } P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Ferner ist der Winkel  $ADB$  im Dreieck  $ABD = 180^\circ$

—  $\alpha$  —  $\beta$ , daher  $\sin ADB = \sin (\alpha + \beta)$ . Es verhält sich aber

$$BD : AB = \sin BAD : \sin ADB \text{ oder}$$

$$P : R = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta) \text{ daher } P = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Da nun  $P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ , so sind die drei Kräfte  $P, Q, R$  nach §. 19. (I) im Gleichgewichte.  
§. 301.

**Aufgabe.** Auf horizontalem Boden  $EF$ , Figur 167., befindet sich ein Schlitten oder Wagen, vor welchem ein Pferd gespannt ist. Man kennt die Kraft  $Q$ , mit welcher der Schlitten der Fortbewegung nach horizontaler Richtung widersteht, und soll daraus die Kraft bestimmen, mit welcher der Brustriemen  $AC$  und Trageriemen  $BC$  das Pferd preßt. Taf. XI.  
Fig. 167.

**Auflösung.** Man ziehe  $DG$  horizontal und setze die Höhe des Brustriemen über dem Angriffspunkte  $D$  oder  $CG = a$  und die Länge des Zugseils  $CD = b$ . a b  
Der Vertikaldruck des Trageriemen auf den Rücken des Pferdes sey  $V$ , die Kraft welche dem Pferde nach horizontaler Richtung am Brustriemen  $AC$  widersteht  $= P$  und die Spannung des Zugseils  $DC = T$ , so zerlegt sich die Kraft  $T$  im Punkte  $D$  nach einer vertikalen Richtung aufwärts, und nach der horizontalen Richtung  $DG$ . Der erste Druck wird vom Gewichte des Schlitten aufgehoben, der letztere nach der Richtung  $DG$  ist  $= T \cos CDG$  und muß auf den Widerstand des Schlittens verwandt werden, daher ist §. 20. V

$$Q = T \cos CDG.$$

Im Punkt C wirkt die Spannung T nach der Richtung CD, und kann daselbst in den Horizontaldruck P nach der Richtung AC und in den Vertikaldruck V nach der Richtung BC zerlegt werden. Man erhält alsdann §. 20.

$$P = T \cos CDG \text{ und } V = T \sin CDG.$$

Es ist daher  $P = Q$  oder die Kraft welche das Pferd am Brustriemen anwenden muß, ist eben so groß als die Gewalt mit welcher der Schlitten der horizontalen Fortbewegung widersteht.

Weil  $V = T \sin CDG$  und  $Q = T \cos CDG$ , so erhält man  $V = Q \operatorname{tg} CDG$ . Aber  $\operatorname{tg} CDG = \frac{CG}{DG} = \frac{a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ ; daher findet man den Druck, mit welchem der Rücken des Pferdes durch den Trageriemen vertikal herunter gepreßt wird, oder

$$V = \frac{aQ}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}.$$

Der Vertikaldruck V wird daher bei einerlei Widerstand Q desto geringer, je kleiner a und je größer b ist, oder je kleiner der Abstand der Horizontale durch den Angriffspunkt D vom Brustriemen ist, und je länger das Zugseil CD angenommen wird.

Man sehe hierüber eine Abhandlung von Couplet, *Réflexions sur le tirage des charettes et des traîneaux* in den *Mém. de l'ac. de Paris* année 1733. p. 67 etc. ed. Amst.

§. 302.

**Zusatz.** Sucht man die erforderliche Länge des Zugseils b, damit ein Pferd bei der zur horizontalen

Bewegung anzuwendenden Kraft nur einen gegebenen Vertikaldruck leide, so darf aus der gefundenen Gleichung nur  $b$  entwickelt werden. Nun ist  $V^2 (b^2 - a^2) = a^2 Q^2$ , daher findet man die erforderliche Länge des Zugseils oder

$$b = \frac{a}{V} \sqrt{Q^2 + V^2}.$$

Beispiel. Eine Last auf horizontalem Boden fort zu bewegen, werde eine Kraft von 200 Pfund erfordert. Man sucht die nöthige Länge des Zugseils, damit ein Pferd, welches diese Last mittelst einer Schleife ziehen soll, nicht stärker als mit einer Gewalt von 100 Pfund vertikal gegen den Boden gedrückt wird, wenn bekannt ist, daß der Brustriemen  $3\frac{1}{2}$  Fuß, und der Ort wo das Seil an der Schleife befestigt ist,  $\frac{1}{2}$  Fuß über dem horizontalen Boden liegt.

Hier ist  $a = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$  Fuß;  $Q = 200$  und  $V = 100$  Pfund, daher die Länge des Zugseils

$$b = \frac{3}{100} \sqrt{200^2 + 100^2} = 6,7 \text{ Fuß.}$$

§. 303.

Aufgabe. An einem Faden  $TCC'C'T''$ , Figur 168., wirken mehrere Kräfte  $T, P, P', P'', T''$  in den Punkten  $C, C', C''$ ; man soll die Bedingungen für das Gleichgewicht angeben, wenn die Größe und Richtung jeder Kraft bekannt ist. Saf. XI.  
Fig. 168.

Auflösung. Die Linie  $OZ$  werde willkürlich gezogen, und man bestimme die Lage der Fäden  $TC, CC', CC'', C'T''$ , indem man solche bis an  $OZ$  in  $A, A', A'', A'''$  verlängert; setze die Winkel  $CAZ = \alpha$ ,  $C'A'Z = \alpha' \dots$ , und verfähre eben so mit den Richtungen der Kräfte  $P, P', P''$ , indem man solche bis

7 B, B', B'' verlängert, und die Winkel  $CBZ = \gamma$ ,  $C'B'Z = \gamma'$ ,  $C''B''Z = \gamma''$  fest. Die Spannung der Fäden  $CT = T$  und  $C''T'' = T''$  ist gegeben, und die der Fäden  $CC'$  und  $C'C''$  sey  $T'$  und  $T''$ , so ist für die Kräfte  $P, T, T'$  am Knoten C, wenn ein Gleichgewicht bestehen soll, und man von denjenigen Kräften, deren Richtungen rückwärts verlängert die Linie OZ schneiden, die Winkel, wie nach §. 29. erfordert wird, negativ in Rechnung bringt:

$$P \sin \gamma - T \sin \alpha + T' \sin \alpha' = 0 \quad [I]$$

$$P \cos \gamma - T \cos \alpha + T' \cos \alpha' = 0$$

Für den Knoten C' ist eben so

$$P' \sin \gamma' - T' \sin \alpha' - T'' \sin \alpha'' = 0 \quad [II]$$

$$P' \cos \gamma' - T' \cos \alpha' - T'' \cos \alpha'' = 0$$

und für den Knoten C''

$$P'' \sin \gamma'' + T'' \sin \alpha'' - T''' \sin \alpha''' = 0 \quad [III]$$

$$P'' \cos \gamma'' + T'' \cos \alpha'' - T''' \cos \alpha''' = 0.$$

Addirt man die Gleichung [I] zu [II], so wird

$$-T \sin \alpha - T'' \sin \alpha'' + P \sin \gamma + P' \sin \gamma' = 0$$

und wenn hiezu die Gleichung [III] addirt wird

$$-T \sin \alpha - T''' \sin \alpha''' + P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' = 0$$

Auf eine ähnliche Art erhält man auch

$$-T \cos \alpha - T''' \cos \alpha''' + P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' = 0.$$

Da dies Verfahren dasselbe bleibt, wenn auch noch so viele Kräfte  $P, P', P'', P''' \dots$  vorhanden sind, so kann man die am letzten Faden wirkende Kraft  $= S$  und den zugehörigen Winkel  $= \beta$  setzen, und erhält alsdann ganz allgemein die Bedingungen für das Gleichgewicht

$$(I) - T \sin \alpha - S \sin \beta + P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \dots = 0$$

$$(II) - T \cos \alpha - S \cos \beta + P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots = 0$$

wo  $T$  und  $S$  die Spannungen des ersten und letzten Fadens sind, und  $P, P', P'' \dots$  die an jedem Knoten angebrachten Kräfte bezeichnen. Auch ist zu bemerken, daß in diesen beiden Ausdrücken diejenigen Winkel negativ in Rechnung gebracht werden, bei welchen die Richtungen der Kräfte rückwärts verlängert die Axe  $OZ$  schneiden.

Setzt man voraus, daß die Endpunkte der Fäden in  $D$  und  $E$  befestigt sind, so leidet jeder Punkt nach der Richtung des daran befestigten Fadens den Druck  $T$  und  $S$ . Diese Pressungen sowohl als die Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  lassen sich durch ein ähnliches Verfahren wie §. 24. leicht finden.

§. 304.

**Zusatz.** Denkt man sich die Kräfte  $T, S, P, P', P'' \dots$  an einem einzigen Punkte nach ihren Richtungen angebracht, so erhält man für das Gleichgewicht unter diesen Kräften nach §. 28. eben dieselben Gleichungen, welche im vorhergehenden §. gefunden worden sind. Wenn sich daher an einer Seilmaschine mehrere Kräfte im Gleichgewichte befinden, so müssen solche auch, an einem einzigen Punkte nach parallelen Richtungen angebracht, im Gleichgewichte seyn.

§. 305.

**Aufgabe.** Eine Seilmaschine mit zwei festen Knoten ist in den Punkten  $A, B$ , Figur 169., beson

Taf. XI  
Fig. 169.

stigt, und man verlangt, daß solche frei herabhängend in die gegebene Lage  $ACDB$  kommen soll. Wie groß müssen die in  $C$  und  $D$  aufzuhängenden Gewichte  $P$  und  $Q$  seyn, damit die Seile die gegebenen Winkel  $ACD = \alpha$  und  $CDB = \beta$  einschließen.

**Auflösung.** Man ziehe die Linien  $CP$ ,  $DQ$  vertikal, verlängere  $AC$  bis  $E$  und  $BD$  bis  $F$ , so bestimmen die Linien  $DE$  und  $CF$  das Verhältniß der Kräfte  $P$  und  $Q$  für das Gleichgewicht, oder es muß sich verhalten

$$P : Q = DE : CF.$$

**Beweis.** Man setze den Winkel  $CED = \delta$ ,  $CFD = \delta'$ , so verhält sich  
 $DE : CD = \sin DCE : \sin CED = \sin \alpha : \sin \delta$  und  
 $CD : CF = \sin CFD : \sin CDF = \sin \delta' : \sin \beta$ , daher  
 $DE : CF = \sin \alpha \sin \delta' : \sin \beta \sin \delta$ .

Setzt man die Spannung des Seils  $CD = W$ , so ist, weil der Winkel  $ECF = \delta$  und  $EDF = \delta'$  nach §. 19.

$$P : W = \sin \alpha : \sin \delta$$

$$W : Q = \sin \delta' : \sin \beta, \text{ daher}$$

$$P : Q = \sin \alpha \sin \delta' : \sin \beta \sin \delta. \text{ Aber auch} \\ DE : CF = \sin \alpha \sin \delta' : \sin \beta \sin \delta, \text{ folglich}$$

$$P : Q = DE : CF.$$

**Anmerkung.** Man kann sich dieser Einrichtung anstatt einer Wage bedienen, wenn man aus dem bekannten Gewichte  $P$  die Größe der Last  $Q$  finden will. Denn es

$$\text{ist } Q = \frac{CF}{DE} \cdot P; \text{ daher, wenn man die Länge } CF \text{ und}$$

$DE$  kennt, so ist dadurch die Last  $Q$  leicht gefunden.

## §. 306.

**Aufgabe.** An einer in D und E, Figur 170.; Kap. XI.  
Fig. 170.  
befestigten Seilmaschine sind in den Knoten C, C', C'' ...  
Gewichte P, P', P'' ... aufgehängt; man soll die Be-  
dingungen für das Gleichgewicht finden.

**Auflösung.** Die Spannung des ersten Fadens  
CD sey T und des letzten C''E = S; der Winkel, T S  
welchen der erste Faden mit dem Horizonte DM' bil-  
det oder CDM' =  $\alpha$  und eben so C''EF =  $\beta$ . " P  
Denkt man sich nun §. 303., Figur 168., die Linie Fig. 168.  
OZ horizontal, so ist jedervon den Winkeln  $\gamma, \gamma' \dots = 90^\circ$   
daher  $\sin \gamma = 1$ ,  $\cos \gamma = 0$ , und man erhält nach  
(I) und (II) §. 303.

$$— T \sin \alpha — S \sin \beta + P + P' + P'' + \dots = 0 \text{ und}$$

$$— T \cos \alpha — S \cos \beta = 0$$

oder wenn man die Summe der Gewichte

$$P + P' + P'' + \dots = V$$
V

setzt, so ist

$$(I) \quad T \sin \alpha + S \sin \beta = V \text{ und}$$

$$(II) \quad T \cos \alpha + S \cos \beta = 0.$$

Es können daher noch so viel Gewichte P, P' ....  
an der Seilmaschine angebracht seyn, so ist doch je-  
desmal

- 1) Die Summe der Gewichte eben so groß, als  
wenn man jede Spannung am äußersten Ende  
mit dem Sinus ihres Neigungswinkels gegen den  
Horizont multiplicirt und beide Produkte addirt.
- 2) Die Summe von den Produkten aus den Span-  
nungen der äußersten Enden in die Cosinus ihrer



Neigungswinkel gegen den Horizont, ist jedesmal Null.

Mit Hülfe der Gleichungen (I) und (II) lassen sich leicht, wenn drei von den Größen  $V$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  gegeben sind, die beiden übrigen finden.

Entwickelt man aus beiden Gleichungen  $S$ , so wird

$$S = \frac{V - T \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{-T \cos \alpha}{\cos \beta} \text{ und hieraus}$$

$$V \cos \beta = T (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = T \sin (\alpha - \beta)$$

daher

$$(III) \quad V : T = \sin (\alpha - \beta) : \cos \beta.$$

Auf ähnliche Art findet man, wenn  $T$  entwickelt wird,

$$(IV) \quad V : S = \sin (\beta - \alpha) : \cos \alpha$$

d. h. die Summe sämtlicher Gewichte verhält sich zur Spannung des Fadens an dem einen Ende, wie der Sinus von der Differenz beider Winkel, welche die Richtung der äußersten Enden der Fäden mit dem Horizonte bilden, zu dem Cosinus des Winkels am andern Ende des Fadens.

#### §. 307.

1. Zusatz. Man verlängere die Richtung der beiden äußersten Fäden  $DC$ ,  $EC'$  bis sich solche in  $N$  schneiden, und ziehe durch  $N$  die Vertikallinie  $NM$ , welche die Horizontallinien durch  $D$  und  $E$  in  $M$  und  $F$  schneidet; setze den Winkel  $DNM = \delta$  und  $MNE = \delta'$ , so ist

$$\alpha = 90^\circ + \delta; \quad \beta = 90^\circ - \delta; \quad \alpha - \beta = \delta + \delta';$$

$$\beta - \alpha = -(\delta + \delta')$$

$$\cos \alpha = -\sin \delta; \quad \cos \beta = \sin \delta'; \quad \sin (\alpha - \beta) = \sin (\delta + \delta'); \quad \sin (\beta - \alpha) = -\sin (\delta + \delta').$$

Nach (III) des vorhergehenden §. ist aber  $V \cos \beta = T \sin (\alpha - \beta)$  daher

$$(I) \quad V \sin \delta' = T \sin (\delta + \delta').$$

Ferner ist nach (IV)  $V \cos \alpha = S \sin (\beta - \alpha)$  daher

$$(II) \quad V \sin \delta = S \sin (\delta + \delta')$$

und wenn man  $V$  aus (I) und (II) entwickelt, so erhält man

$$(III) \quad T \sin \delta = S \sin \delta'.$$

Vergleicht man diese drei Ausdrücke mit den §. 19. gefundenen, so folgt daraus, daß die Kräfte  $V, T, S$  am Punkte  $N$  nach den Richtungen  $MN, ND, NE$  im Gleichgewichte sind;  $MN$  ist daher die mittlere Richtung von sämtlichen Gewichten  $P, P', P'' \dots = V$ , und man findet daher diese mittlere Richtung eben so, als wenn man die beiden Spannungen  $T$  und  $S$  als Seitenkräfte ansieht, und zu denselben die Lage der Mittelkraft  $V$  sucht.

Weil sämtliche Gewichte von  $D$  bis  $C''$  im Gleichgewichte bleiben müssen, wenn man statt des Gewichtes  $P'$  den Faden bei  $C'$  befestigt, so müssen auch die vorstehenden Sätze auf eine ähnliche Art vom Punkte  $C'$  wie vom Punkte  $E$ , und eben so von jedem andern Knoten gelten.

§. 308.

2. Zusatz. Denkt man sich die Knoten  $C, C', C'' \dots$ , Figur 170., unendlich nahe an einander und jeden mit einem kleinen Gewichte beschwert, so entsteht hier. Taf. XI. Fig. 170.

aus ein schweres vollkommen biegsames Seil und die krumme Linie, welche dasselbe bildet, nennt man die Kettenlinie. Ist  $V$  das Gewicht dieses Seils zwischen den beiden Spannungen  $T$  und  $S$ , so gelten noch die im vorigen §. erwiesenen Sätze. Es sey daher D G C E, Figur 171., ein solches in den Punkten D und E aufgehängtes Seil, und C ein Punkt in demselben, dessen Tangente CN horizontal ist. Für irgend einen andern Punkt G sey die Tangente GN, und die Spannung in  $G = T$ , in  $C = C$ ; das Gewicht des Seiles zwischen G und C  $= V$ , so ist, wenn man NM vertikal und GM horizontal zieht, den Winkel  $GNM = \delta$ ,  $MNC = \delta'$  und  $NGM = \varphi$  setzt:

$$V \sin \delta' = T \sin (\delta + \delta'); \quad V \sin \delta = C \sin (\delta + \delta') \text{ und } T \sin \delta = C \sin \delta'.$$

Es ist aber

$$\delta = 90^\circ - \varphi; \quad \delta' = 90^\circ; \quad \delta + \delta' = 180^\circ - \varphi; \text{ daher } \sin \delta = \cos \varphi; \quad \sin \delta' = 1; \quad \sin (\delta + \delta') = \sin \varphi$$

folglich, wenn man diese Werthe in die vorstehenden drei Gleichungen setzt,

$$(I) \quad V = T \sin \varphi$$

$$(II) \quad V = C \operatorname{tgt} \varphi$$

$$(III) \quad T \cos \varphi = C$$

welches die Fundamentalgleichungen für die Kettenlinie sind, woraus man alle übrige Eigenschaften derselben, wie im fünften Abschnitte des Anhanges, entwickeln kann.

## §. 309.

**Aufgabe.** An einer Seilmaschine, wovon das eine Ende der Schnur  $CA$  in  $A$  befestigt ist, sind zwei Gewichte  $P, Q$  dergestalt aufgehängt, daß das eine  $P$  am Knoten  $C$ , Figur 172., und das andere an der Schnur  $CB$  über die Rolle  $B$  frei herunter hängt; man sucht die Lage des Knoten  $C$  bei welcher die gegebenen Gewichte  $P, Q$  im Gleichgewichte sind. Taf. XI. Fig. 172.

**Auflösung.** Durch den bestimmten Punkt  $A$  werde die Vertikale  $AD$  gezogen, und mit der gegebenen Schnurlänge  $AC$  der Kreisbogen  $DC'$  beschrieben. In einem willkürlichen Punkte  $e$  der Linie  $AD$  ziehe man  $ef$  auf  $Ae$  winkelrecht, und nehme  $Ae:ef = P:Q$ .

Durch  $A$  und  $f$  werde die Linie  $Af$  und durch mehrere Punkte wie  $e'$ , die Linien  $e'f'$  mit  $ef$  parallel gezogen. Ferner ziehe man durch  $e, e' \dots$  die Linien  $eB, e'B \dots$  welche die Rolle in  $B$  berühren, nehme  $ec = ef; e'c' = e'f'; \dots$  ziehe durch die Punkte  $c, c' \dots$  die Kurve  $cCc'$  bis solche den Kreisbogen  $DC$  in  $C$  schneidet, so ist in  $C$  der Ort wo der Knoten der Seilmaschine hängen muß, und  $CP, CA, CB$  ist die Lage der Schnüre, wenn  $P$  mit  $Q$  im Gleichgewichte seyn soll.

**Beweis.** Man verlängere die Richtung  $PC$  nach  $G$  und setze den Winkel  $ACG = \delta, BCG = \delta'$ , so verhält sich

$$AE : EC = \sin ACE : \sin CAE \text{ oder}$$

$$AE : EF = \sin (\delta + \delta') : \sin \delta. \text{ Aber}$$

$$AE : EF = Ae : ef = P : Q \text{ daher}$$

$$P : Q = \sin (\delta + \delta') : \sin \delta \text{ oder}$$

$$P \sin \delta = Q \sin (\delta + \delta')$$

daher ist nach §. 307. (II.) P mit Q im Gleichgewichte.

§. 310.

**Zusatz.** Wenn die Kurve  $Acc'$  beschrieben ist und man verändert den Halbmesser  $AD = AC$ , so erhält man dadurch einen andern Durchschnittspunkt in der Kurve  $Ac'$  wo der Knoten hängen muß, damit die Gewichte P, Q im Gleichgewichte sind. Sieht man daher dem Halbmesser AD alle mögliche positive Werthe, so wird der Knoten in alle Punkte der Kurve  $Ac'$  fallen. Wenn daher das Gewicht P nicht an einem Knoten in C befestigt, sondern mittelst eines Ringes an der Schnur ACB frei beweglich ist, so giebt die Kurve  $Acc'$  alle mögliche Punkte an, in welchen sich der Ring befinden kann, damit an der Seilmaschine ein Gleichgewicht ist.

Diese Auflösung findet man in der *Nouvelle Mécanique ou Statique de Varignon à Paris 1725, Tome II. p. 314.*

## II. Von der Reibung eines um einen unbeweglichen Cylinder gespannten Seiles.

§. 311.

**Aufgabe.** Um den Cylinder ABD, Figur 173., ist ein Seil QABV geschlagen, an dessen einem Ende

Kaf. XI.  
Fig. 173.

## II. Reibung ein. um ein. unbewegl. Cylind. x. 435

die Last  $Q$  hängt; man sucht die Kraft  $V$  am andern Ende, welche der Last  $Q$  und der Reibung längs dem Umfange  $AMB$  das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** Man setze den Halbmesser  $AC = r$  und für irgend einen Bogen  $AM$  sey der zugehörige Bogen dessen Halbmesser 1 ist  $= \Phi$ , so ist der Bogen  $AM = r\Phi$ . Ist nun der Normaldruck auf den Bogen  $AM$ , welcher von den Kräften  $Q, V$  herrührt  $= N$  und wächst  $AM$  um das Element  $Mm = r\partial\Phi$ , so ist der Normaldruck auf  $Mm = \partial N$ . Man theile  $Mm$  in zwei gleiche Theile in  $n$ , setze die Spannung des Seils in  $M = T$ , so wirkt auch im Punkte  $n$  eine Kraft  $T$  nach  $nM$  und eine eben so große Kraft nach  $nm$ . Mit diesen beiden Kräften muß die Kraft  $\partial N$  in  $n$  im Gleichgewichte seyn, oder beide Kräfte müssen nach  $nC$  einen Druck  $\partial N$  hervor bringen. Man erhält daher nach §. 21. II. die Mittelkraft  $\partial N = 2T \cos CnM$ .

Aber  $\cos CnM = \frac{Mn}{Cn} = \frac{\frac{1}{2}r\partial\Phi}{r} = \frac{1}{2}\partial\Phi$ , daher  $\partial N = T\partial\Phi$ .

Von dem Drucke  $N$  entsteht eine Reibung  $\mu N$ , es ist daher  $T = Q + \mu N$ , oder wenn man differenziert  $\partial T = \mu\partial N$ , oder statt  $\partial N$  den gefundenen Werth gesetzt

$$\partial T = \mu T \partial \Phi \text{ oder } \frac{\partial T}{T} = \mu \partial \Phi$$

und wenn man integrirt

$\log n T = \mu \Phi + \text{const.}$  Für  $\Phi = 0$  wird  $T = Q$  also  $\log n Q = \text{const}$  daher  $\log n T = \mu \Phi + \log n Q$  oder

$$\log n \frac{T}{Q} = \mu \Phi$$

oder wenn  $e = 2,7182818$  die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet

$$\frac{T}{Q} = e^{\mu \Phi} \text{ folglich } T = Q e^{\mu \Phi}$$

Ist nun der Bogen, welcher zum Winkel  $ACB$  für den Halbmesser 1 gehört  $= \alpha$ , so wird  $T = V$  wenn  $\Phi = \alpha$  wird, man erhält daher die Kraft

$$V = Q e^{\mu \alpha}.$$

Hieraus folgt, daß wenn der Bogen  $\alpha$ , um welchen das Seil gewickelt ist, in einer arithmetischen Progression wächst, so muß die Kraft  $V$  in einer geometrischen Progression zunehmen, woraus leicht folgt, daß nach einigen Umwickelungen die Kraft  $V$  sehr groß seyn muß.

§. 312.

Für eine Umwicklung wird  $\alpha = 2\pi$ , also für  $n$  Umwickelungen  $= 2n\pi$ , daher für diesen Fall

$$V = Q e^{2n\mu\pi}.$$

Beispiel. Die Last  $Q$  am Ende des Seiles sey 10 Pfund und das Seil sey um den vierten Theil des Umfangs eines Cylinders geschlungen, so ist  $n = \frac{1}{4}$  und wenn  $\mu = \frac{1}{3}$  gesetzt wird, so erhält man

$$2n\mu\pi = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,14159 \dots = 0,5235987756.$$

Rechnet man nun mit gemeinen Logarithmen, so ist

$$\lg e = \lg 2,7182 \dots = 0,4342945. \text{ Es ist aber}$$

$$\lg e^{0,5235} \dots = 0,52359 \cdot \lg e = 0,5235988 \cdot 0,4342945 \text{ und}$$

$$\lg 0,5235988 = 0,7189985 - 1$$

$$\lg 0,4342945 = 0,6377843 - 1$$

$$0,3567828 - 1 = \lg 0,2273960, \text{ also}$$

$$\lg e^{0,523} \dots = 0,227396 = \lg 1,688092, \text{ also}$$

## II. Reibung ein. um ein. unbewegl. Cylind. ic. 437

$e^{0,523} \dots = 1,688092$ , folglich

$$V = Q e^{0,523} = 10 \cdot 1,688092 = 16,88092 \text{ Pfund.}$$

Um besser zu übersehen, wie schnell die Werthe von  $V$  mit der Zahl der Umwickelungen wachsen, können nachstehende Resultate dienen. Für

$n = 0$	wird	$V =$	. . . . .	1,000 Q
$n = \frac{1}{2}$	—	$V =$	. . . . .	1,688 Q
$n = \frac{1}{3}$	—	$V =$	. . . . .	2,850 Q
$n = 1$	—	$V =$	. . . . .	8,121 Q
$n = 2$	—	$V =$	. . . . .	65,944 Q
$n = 4$	—	$V =$	. . . . .	4348,555 Q
$n = 6$	—	$V =$	. . . . .	286788,920 Q
$n = 8$	—	$V =$	. . . . .	18908434,000 Q
$n = 10$	—	$V =$	. . . . .	1248142286,000 Q

## III. Von der Steifigkeit der Seile.

### §. 313.

Bei dem Gebrauche der Seile ist es öfters nothwendig, solche über Rollen oder Walzen zu biegen; da nun die Seile nicht als vollkommen biegsam anzunehmen sind, und eine gewisse Kraft erfordert wird, wenn ein grades etwas dickes Seil in eine Krümmung gebogen werden soll, so ist es nothwendig, für jeden besondern Fall diejenige Kraft kennen zu lernen, welche zur Biegung eines Seiles verwandt werden muß. Die Gewalt, mit welcher ein Seil dem Biegen widersteht, nennt man seine Steifigkeit. Um von der Gewalt, mit welcher die Seile dem Biegen widerstehen, eine richtige Vorstellung zu erhalten, und die zur Ueberwindung dieses Widerstandes erforderliche Kraft zu be-



Zaf. XI.  
Fig. 174.

stimmen, denke man sich eine um den festen Bolzen C, Figur 174., bewegliche Rolle AB, über welche ein Seil VADBQ gelegt ist, an dessen Enden die Gewichte V, Q herunter hängen. Kommt nun die Rolle von B nach D in Bewegung, und das Gewicht Q steigt in die Höhe, so muß das Seil bei B umgebogen werden. Wegen seiner Steifigkeit widersteht es aber der Biegung und der Erfolg muß der seyn, daß die Last Q desto mehr von der Vertikale BB' abweicht, je größer die Steifigkeit des Seiles ist. Durch den Schwerpunkt der Last Q sey die Vertikallinie Qb gezogen, so wird bei A in dem Verhältnisse mehr Kraft zur Umdrehung der Rolle erfordert werden, als der Horizontalabstand Cb größer wie CB ist. Noch kommt bei der Steifigkeit der Umstand in Betrachtung, daß das Seil bei A wieder grade gebogen werden muß. Wäre das Seil vollkommen elastisch; so würde solches nach aufgehobenem Drucke seine grade Gestalt wieder annehmen. Weil aber die Elasticität der Seile nur sehr unvollkommen ist, so gehört auch einige Kraft dazu, ein frumm gebogenes Seil wieder grade zu biegen. Aus dieser Ursache wird das zweite aufgehängte Gewicht V nicht vertikal abwärts nach AA' hängen, sondern nach AV von der Vertikallinie AA' abweichen, weil das gebogene Seil seine Krümmung beizubehalten strebt. Soll nun das Uebergewicht von V die Umdrehung der Rolle und die Erhebung des Gewichtes Q bewirken, so wird der Abstand Ca der Kraft V kleiner als der Halbmesser der Rolle, und man muß

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 439

auch dieserhalb oder zur Gradebiegung des Seils einige Kraft verwenden. Diese ist aber gewöhnlich so unbedeutend, daß solche aus der Rechnung gänzlich wegfallen kann. Die Beugung aus der graden Richtung in die krumme erfordert aber eine nähere Untersuchung.

#### §. 314.

Will man ein loses Seil um eine Walze oder Rolle biegen, so wird offenbar mehr Kraft zur Biegung des Seiles erfordert, je dicker dasselbe und je kleiner der Halbmesser der Rolle ist. Ob aber die Steifigkeit der Dicke des Seiles oder irgend einer Potenz dieser Dicke proportional, und welche Potenz des Halbmessers der Rollen anzunehmen sey, dieses kann nur durch genaue Versuche ausgemittelt werden. Man setze die Dicke oder den Durchmesser des Seiles  $= \delta$ , den Halbmesser der Rolle  $= r$ , so wird sich die Kraft, welche zur Biegung des losen Seils erfordert wird, durch  $A \frac{\delta^n}{r^m}$  ausdrücken lassen, wo die unveränderlichen Größen  $A$ ,  $m$ ,  $n$  durch Versuche zu bestimmen sind.

Zur Biegung eines angespannten Seiles wird mehr Kraft erfordert, als wenn dasselbe lose ist. Je größer die Kraft  $Q$  ist, welche ein Seil ausspannt, desto mehr Kraft muß auch auf die Biegung verwandt werden, und man kann daher, wegen der Spannung  $Q$  die zum Biegen eines gespannten Seiles erforderliche Kraft, einer Potenz von  $Q$  proportional annehmen. Ein angespanntes Seil zu biegen erfordere da-

her eine Kraft  $B \frac{\delta^n}{r^n} Q'$  wo  $B$  und  $t$  ebenfalls durch Versuche zu bestimmen sind.

Nun war für das lose Seil die erforderliche Kraft zum Biegen  $= A \frac{\delta^n}{r^n}$ , und da diese Kraft auch beim gespannten Seile ohne Rücksicht auf die Spannung verwandt werden muß, so erhält man, wenn  $F$  die erforderliche Kraft bezeichnet, welche zur Ueberwältigung der Steifigkeit des Seils erfordert wird

$$F = A \frac{\delta^n}{r^n} + B \frac{\delta^n}{r^n} Q' = \frac{\delta^n}{r^n} (A + BQ').$$

Zaf. XI. Um diesen Ausdruck richtig zu verstehen, sey  $AB$ , Fig. 174. eine Rolle, deren Halbmesser  $CA = r$  ist. Die Dicke oder der Durchmesser vom Querschnitte des Seiles sey  $\delta$  und an jedem Ende desselben hänge eine Last  $Q$ , so ist die Spannung des Seils  $= Q$ . Legt man nun dem Gewichte  $Q$  bei  $A'$  noch so lange Gewichte zu, bis die Steifigkeit des Seiles bei  $B$  überwältigt wird, so ist dasjenige Gewicht  $F$ , welches noch zu  $Q$  bei  $A'$  hinzu gefügt werden muß, um das Gleichgewicht mit der Steifigkeit zu halten, dem vorhin gefundenen Ausdrucke gleich.

### §. 315.

Die ersten Versuche über Steifigkeit der Seile sind von Amonton aufgestellt, und in den *Mémoires de l'Académie de Paris*, années 1699 (p. 259 — 286. edit. Amst.) beschrieben, auch ist zugleich eine sinnreiche Methode angegeben, wie die Steifigkeit der

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 441

Seile mit der erforderlichen Genauigkeit ausgemittelt werden kann. Von zwei gleichen Seilen sey jedes an einem Ende bei A, Figur 175., befestigt, und an dem andern bei B eine große Wageschale D mit einer Belastung R angebracht. Werden nun beide Seile um einen Cylinder C geschlagen, und man belastet denselben mit Hülfe einer kleinen Wageschale F, welche an einem sehr biegsamen Faden seines Umfanges befestigt ist, so lange bis er herunter sinkt, so ist dadurch die Steifigkeit beider Seile überwältigt. Amontons hat mit dieser Vorrichtung mehrere Versuche angestellt und a. a. D. beschrieben. Allein seine Seile waren nur 1, 2 — 3 Linien dick, und die größte Belastung der Wageschale D hat nur 60 Pfund, also auf jedes Seil nur 30 Pfund betragen, dabei waren die Cylinder nur  $\frac{1}{2}$ , 1 und  $1\frac{1}{2}$  Zoll dick, so daß von den gefundenen Resultaten nur wenig Gebrauch in der Ausübung zu machen ist. Weit wichtiger sind die mannigfaltigen Versuche, welche Herr Coulomb bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Reibung angestellt hat. Die Beschreibung dieser Versuche findet man in den §. 186. angeführten Mémoires de Mathématiques etc. und man wird sich hier damit begnügen, diese Versuche tabellarisch darzustellen, damit aus denselben die nöthigen Folgerungen, zur Erlangung eines Ausdrucks für die Steifigkeit der Seile leicht erhalten werden können.

Zuvor ist noch anzumerken, daß die Spannung eines jeden Seiles, bei der Amontonschen Vorrichtung, nur halb so viel beträgt, als das Gewicht der

Taf. XI.  
Fig. 175.

Wageschale D nebst der Belastung R, und daß, wenn man die mit dieser Vorrichtung angestellten Versuche bei einer Rolle anwenden will, welche mit der Walze gleichen Halbmesser hat, und bei welcher die Spannung des Seiles eben so groß als bei jedem einzelnen Seile an der Walze seyn soll,

$$Q = \frac{1}{2} R \text{ und } F = \frac{1}{2} C + f$$

ist; wo R das Gewicht der Wageschale D nebst der Belastung, C das Gewicht des Cylinders und f das Gewicht der kleinen Wageschale F nebst ihrer Belastung ist, die Größen Q und f aber die §. 314. gegebene Bedeutung haben. Um zu übersehen, daß  $F = \frac{1}{2} C = f$  ist, setze man die Last C der Welle, welche in ihrer Ase vereinigt ist, sey für sich allein mit der Steifigkeit beider Seile im Gleichgewichte, so wirkt die Last  $\frac{1}{2} C$  zur Biegung eines Seiles am Halbmesser der Welle, und eben so groß ist der Halbmesser, an welchem die Kraft F zur Biegung des Seiles um die Rolle wirkt; daher muß  $F = \frac{1}{2} C$  seyn, oder die Last  $\frac{1}{2} C$  in der Mitte der Welle wirkt auf die Biegung des Seiles eben so, als wenn dasselbe über eine Rolle von gleichem Durchmesser geschlagen wäre, und am Umfang der Rolle diese Kraft  $\frac{1}{2} C$  die Biegung bewirkte. Bringt man nun statt des Gewichtes f, welches am Durchmesser der Welle zur Biegung der Seile bei E wirkt, ein gleichgeltendes im Mittelpunkte der Welle an, so muß dies  $= 2f$  seyn, weil der Abstand von E nur halb so groß ist. Da nun  $2f$  beide Seile biegt, so ist f die Kraft zur Bie-

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 443

gang eines Seiles, welche im Mittelpunkte der Welle bei der Amontonschen Vorrichtung eben so wirkt, als wenn solche am Umfange einer Rolle angebracht wäre.

§. 316.

Die Coulombschen Versuche, deren Resultate die nachstehende Tafel enthält, sind mit vier neuen trocknen Seilen angestellt worden. Man hatte, um die Seile beinahe in denselben Zustand zu setzen wie sie beim Gebrauche vorkommen, solche über eine Rolle gebracht, und an beiden Enden Gewichte von 4—500 Pfund angehängt, und sie von einem Menschen eine Stunde lang auf und nieder bewegen lassen, damit sie nach ihrer ganzen Länge eine gleichförmige Biegsamkeit erhielten. Das erste Seil hatte drei Ripen (*Torons*) jede von zwei Fäden (*Filet de carret*), bestand also überhaupt aus 6 Fäden. Der Umfang des Seils war  $12\frac{1}{2}$  Linie, also  $\delta = 3,98''$ . Sechs Zoll der Länge wogen  $\frac{1}{2}$  Gros poids de marc.

Das zweite Seil hatte 3 Ripen jede von 5 Fäden, also überhaupt 15 Fäden. Der Umfang des Seiles war 20 Linien, also  $\delta = 6,36''$ . Sechs Zoll der Länge wogen  $\frac{2}{4}$  Gros.

Das dritte Seil hatte 3 Ripen, jede von 10 Fäden, also überhaupt 30 Fäden. Der Umfang war 28 Linien, also  $\delta = 8,91''$ . Sechs Zoll der Länge wogen  $\frac{4}{2}$  Gros.

Das vierte Seil hatte 4 Ripen, jede von 28 Fäden, also überhaupt 112 Fäden. In der Mitte des Seiles befand sich eine Rippe (*Meche*) um den Raum

auszufüllen, welcher sich zwischen den vier Risen befand. Der Umfang des Seiles war 57 Linien, also  $\delta = 18,14''$ . Sechs Zoll wogen  $\frac{17}{4}$  Gros.

Die Versuche sind zwar mit der beschriebenen Amontonschen Vorrichtung angestellt worden, in der nachstehenden Tafel hat man aber die Resultate so aufgeführt, daß sich solche nur auf ein Seil beziehen, welches über eine Rolle gespannt ist. Zur Abkürzung bezeichnet

$p$  den Umfang des Seiles

$r$  den Halbmesser der Walze (Rolle)

$Q$  die Spannung eines Seiles

$F$  die Kraft, welche erfordert wird, das Seil zu biegen, wenn es über eine Rolle geschlagen und die Kraft am Umfange der Rolle angebracht wäre.

Sämmtliche Längenmaaße beziehen sich auf das Pariser Fußmaaß, wo 1 Pariser Fuß = 1,0350032 rheinländische ist. Die Gewichte sind das pariser Poids de marc, wovon 1 Pfund = 1,0447582 berliner Pfund ist.

M. s. meine Vergleichung der Maaße und Gewichte S. 73 und 77.

Die folgende Tafel enthält noch eine Spalte mit der Ueberschrift  $\frac{p^2 Q}{r F}$ , wovon erst in der Folge die Rede seyn wird.

# III. Von der Steifigkeit der Seile. 445

## Versuche mit neuen trocknen Seilen.

No.	p Einien	r Zoll	Q Pfund	F Pfund	$\frac{p^2 Q}{r F}$
1	12 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	2,0	1953,12
2	12 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	62 $\frac{1}{2}$	11,0	1775,47
3	12 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	112 $\frac{1}{2}$	17,0	2068,01
4	12 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	212 $\frac{1}{2}$	31,0	2142,12
5	12 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	312 $\frac{1}{2}$	43,0	2271,07
6	12 $\frac{1}{2}$	1	62 $\frac{1}{2}$	4,0	2441,40
7	12 $\frac{1}{2}$	1	112 $\frac{1}{2}$	6,5	2704,32
8	12 $\frac{1}{2}$	1	212 $\frac{1}{2}$	12,0	2766,92
9	12 $\frac{1}{2}$	1	312 $\frac{1}{2}$	15,0	3255,21
10	12 $\frac{1}{2}$	2	212 $\frac{1}{2}$	5,7	2912,55
11	12 $\frac{1}{2}$	2	312 $\frac{1}{2}$	7,2	3390,84
12	12 $\frac{1}{2}$	2	512 $\frac{1}{2}$	11,0	3639,91
13	20	$\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	7,0	1428,57
14	20	$\frac{1}{2}$	62 $\frac{1}{2}$	22,0	2272,72
15	20	$\frac{1}{2}$	112 $\frac{1}{2}$	30,0	3000,00
16	20	$\frac{1}{2}$	212 $\frac{1}{2}$	65,0	2615,38
17	20	$\frac{1}{2}$	312 $\frac{1}{2}$	92,0	2717,39
18	20	1	12 $\frac{1}{2}$	3,2	1562,50
19	20	1	62 $\frac{1}{2}$	9,0	2777,77
20	20	1	112 $\frac{1}{2}$	17,0	2647,06
21	20	1	212 $\frac{1}{2}$	31,0	2741,93
22	20	1	312 $\frac{1}{2}$	41,0	3048,88
23	20	2	12 $\frac{1}{2}$	1,7	1470,59
24	20	2	62 $\frac{1}{2}$	5,0	2500,00
25	20	2	112 $\frac{1}{2}$	7,0	3214,28
26	20	2	212 $\frac{1}{2}$	13,0	3261,53
27	20	2	312 $\frac{1}{2}$	16,7	3712,57
28	20	2	512 $\frac{1}{2}$	27,0	3981,48
29	28	1	12 $\frac{1}{2}$	11,0	890,90
30	28	1	62 $\frac{1}{2}$	21,0	2333,33
31	28	1	112 $\frac{1}{2}$	29,0	3041,37
32	28	1	212 $\frac{1}{2}$	47,0	3544,68
33	28	1	312 $\frac{1}{2}$	67,0	3656,71
34	28	2	12 $\frac{1}{2}$	5,0	980,00
35	28	2	62 $\frac{1}{2}$	8,5	2882,35
36	28	2	112 $\frac{1}{2}$	14,0	3150,00
37	28	2	212 $\frac{1}{2}$	23,0	3621,74
38	28	2	312 $\frac{1}{2}$	31,0	3951,61
39	28	2	512 $\frac{1}{2}$	50,0	4018,00
40	28	3	512 $\frac{1}{2}$	34,0	3939,21
41	57	3	50	19,0	2850,00
42	57	3	500	100,0	5415,00



## §. 317.

Um zu finden, welcher Potenz der Spannung  $Q$  die Steifigkeit der Seile entspricht, kommt es darauf an, den Werth  $t$  §. 314. aus den vorstehenden Versuchen zu finden. Sind daher  $F, Q, r, \delta$  und  $F', Q', r', \delta'$  zusammengehörige Werthe zweier Versuche, so ist

$$F = \frac{\delta^n}{r^n} A + \frac{\delta^n}{r^n} B Q^t \text{ und } F' = \frac{\delta'^n}{r'^n} A + \frac{\delta'^n}{r'^n} B Q'^t$$

also wenn  $\delta = \delta'$  und  $r = r'$ , so erhält man

$$F' - F = \frac{\delta^n}{r^n} B (Q'^t - Q^t)$$

und auf ähnliche Art

$$F'' - F = \frac{\delta^n}{r^n} B (Q''^t - Q^t); \text{ daher}$$

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{Q''^t - Q^t}{Q'^t - Q^t} \text{ und wenn } t = 1 \text{ wäre}$$

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{Q'' - Q}{Q' - Q}$$

Vergleicht man mit dieser Voraussetzung die Versuche No. 1, 3 und 5, so ist  $F = 2, F' = 17, F'' = 43$  u. s. w.; man erhält daher

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{41}{15} = 2,733$$

$$\frac{Q'' - Q}{Q' - Q} = \frac{300}{100} = 3,000.$$

Vergleicht man die übrigen Versuche auf eine ähnliche Art, so entsteht folgende Tafel

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 447

No. d. Versuche	$F'' - F$	$F' - F$	$Q'' - Q$	$Q' - Q$	$\frac{F'' - F}{F' - F}$	$\frac{Q'' - Q}{Q' - Q}$
1. 3. 5	41,0	15,0	300	100	2,73	3,00
6. 7. 9	11,0	2,5	250	50	4,40	5,00
10.11.12	5,3	1,5	300	100	3,53	3,00
13.15.17	85,0	23,0	300	100	3,65	3,00
18.20.22	37,8	13,8	300	100	2,74	3,00
23.26.28	25,3	11,3	500	200	2,24	2,50
29.31.33	56,0	18,0	300	100	3,11	3,00
34.37.39	45,0	18,0	500	200	2,50	2,50

Hieraus sieht man, daß die Werthe von  $\frac{Q'' - Q}{Q' - Q}$  bald größer oder kleiner wie  $\frac{F'' - F}{F' - F}$  werden, daß man also für die Ausübung ohne merklichen Fehler voraussetzen darf, daß unter übrigens gleichen Umständen die Steifigkeit der Seile ihrer Spannung proportional sey. Dies giebt  $t = 1$ , also  $Q' = Q$ .

§. 318.

Weil  $F = \frac{\delta^n}{r^m} (A + B Q)$ , also  $r^m = \frac{\delta^n}{F} (A + B Q)$ , so erhält man bei einer ähnlichen Bezeichnung für einen zweiten Versuch  $r'^m = \frac{\delta'^n}{F'} (A + B Q')$ ; oder wenn man  $\delta = \delta'$  und  $Q = Q'$  setzt

$$r^m = \frac{\delta^n}{F} (A + B Q) \text{ und } r'^m = \frac{\delta^n}{F'} (A + B Q)$$

$$\text{also } \frac{r^m}{r'^m} = \left(\frac{r}{r'}\right)^m = \frac{F'}{F}, \text{ daher } m \log \frac{r}{r'} = \log \frac{F'}{F}$$

$$\text{oder } m = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{r}{r'}}.$$

Mitteltst dieses Ausdrucks läßt sich der Exponent  $m$

vom Halbmesser  $r$  der Rolle aus den Versuchen finden. Verbindet man die Versuche No. 2 und 6 mit einander, so wird  $\frac{F'}{F} = \frac{11}{4} = 2,75$  und  $\frac{r}{r'} = \frac{1}{0,5} = 2$

$$\text{oder } m = \frac{\log 2,75}{\log 2} = \frac{0,4393}{0,3010} = 1,45.$$

Verfährt man auf eine ähnliche Art mit den übrigen Versuchen, so entsteht nachstehende Tafel

No. der Versuche	Q	$\frac{F'}{F}$	$\frac{r}{r'}$	m
2 . 6	$62\frac{1}{2}$	2,75	2	1,45
5 . 9	$312\frac{1}{2}$	2,87	4	1,52
4 . 10	$212\frac{1}{2}$	5,44	2	1,22
8 . 10	$212\frac{1}{2}$	2,11	2	1,07
9 . 11	$312\frac{1}{2}$	2,08	2	1,06
13 . 18	$12\frac{1}{2}$	2,19	2	1,33
13 . 23	$12\frac{1}{2}$	4,12	4	1,02
17 . 22	$312\frac{1}{2}$	2,24	2	1,16
17 . 27	$312\frac{1}{2}$	5,51	4	1,23
18 . 23	$12\frac{1}{2}$	1,88	2	0,91
22 . 27	$312\frac{1}{2}$	2,45	2	1,29
29 . 34	$12\frac{1}{2}$	2,20	2	1,14
33 . 38	$312\frac{1}{2}$	2,16	2	1,11
39 . 40	$512\frac{1}{2}$	1,47	1,5	0,95

Als Mittelwerth für  $m$  erhält man 1,2; woraus folgt, daß sich unter übrigens gleichen Umständen die Steifigkeiten zweier Seile umgekehrt wie  $r^{1,2}$  verhalten.

### §. 319.

Nach Amontons's Versuchen sollen sich zwar die Steifigkeiten der Seile unter übrigens gleichen Umständen wie ihre Dicken  $\delta$  verhalten; vergleicht man aber die vielfältigern Coulombschen Versuche, so entstehen ganz andere Resultate. Mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung erhält man

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 449

$\delta^n = \frac{r^n F}{A + BQ}$ , und wenn  $r = r'$  und  $Q = Q'$  gesetzt wird, so erhält man

$$\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^n = \frac{F'}{F} \text{ also } n \log \frac{\delta'}{\delta} = \log \frac{F'}{F}, \text{ folglich}$$

$$n = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{\delta'}{\delta}} = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{p'}{p}}.$$

Berechnet man aus mehreren zusammengehörigen Versuchen die Werthe für  $n$ , so entsteht nachstehende Tafel

No. der Versuche	r	Q	F' : F	p' : p	n
18 . 29	1	12½	3,2 : 11,0	20 : 28	3,6
23 . 34	2	12½	1,7 : 5,0	20 : 28	3,2
1 . 13	½	12½	2,0 : 7,0	12½ : 20	2,6
25 . 36	2	1½2½	7,0 : 14,0	20 : 28	2,6
9 . 22	1	3½2½	15,0 : 41,0	12½ : 20	2,1
7 . 20	1	1½2½	6,5 : 17,0	12½ : 20	2,0
12 . 28	2	5½2½	11,0 : 27,0	12½ : 20	1,9
9 . 33	1	3½2½	15,0 : 67,0	12½ : 28	1,8
11 . 38	2	3½2½	7,2 : 31,0	12½ : 28	1,8
27 . 38	2	3½2½	16,7 : 31,0	20 : 28	1,8
12 . 39	2	5½2½	11,0 : 50,0	12½ : 28	1,8
10 . 26	2	2½2½	5,7 : 13,0	12½ : 20	1,7
10 . 37	2	2½2½	5,7 : 23,0	12½ : 28	1,7
11 . 27	2	3½2½	7,2 : 16,7	12½ : 20	1,7
5 . 17	½	3½2½	43,0 : 92,0	12½ : 20	1,6
20 . 31	1	1½2½	17,0 : 29,0	20 : 28	1,6

Die vorstehende Tafel giebt so abweichende Werthe für  $n$ , daß man die Hoffnung beinahe aufgeben muß, einen allgemein gültigen Ausdruck für  $F$  zu finden, welcher nur allein auf die Versuche §. 316. paßt. Eben so abweichende Werthe erhält man, wenn die willkürlich angenommenen Koeffizienten  $A$  und  $B$  bestimmt werden, es bleibt daher nichts übrig, als daß man,

wenn eine bedeutende Genauigkeit verlangt wird, sehr verschiedene Ausdrücke für  $F$  bildet und die Grenzen genau bestimmt, innerhalb welchen sie angewandt werden können. Wollte man sich für  $n$  mit einem Mittelwerthe begnügen, so kann  $n = 2$  gesetzt werden.

In der Neuen Architectura Hydraulica von Prony findet man §. 1180. folgenden Ausdruck zur Berechnung der Steifigkeit der Seile angegeben

$$F = \frac{\delta^{1,7}}{r} (2,45 + 0,053 Q)$$

wo sich  $r$  und  $\delta$  auf pariser Linien und  $Q$ ,  $F$  auf pariser Pfunde beziehen: Allein derselbe ist nur vorzüglich für die Coulombschen Versuche No. 29 bis 33. §. 316. entwickelt. Wollte man denselben auch auf die übrigen Versuche, z. B. auf No. 1. anwenden, so erhält man  $F = 5,427$  Pfund, statt daß die Versuche  $F = 2$  Pfund geben.

### §. 320.

Weil es für die Ausübung zu weitläufig ist, nach mehreren Formeln die Steifigkeit der Seile zu berechnen, und da sich schon aus den vorhergehenden drei §. §. ergibt, daß dennoch keine große Genauigkeit zu erwarten ist, überdies aber selbst bei gleich dicken Seilen öfters eine ansehnliche Verschiedenheit in Absicht ihrer Steifigkeit statt findet, so wird es genügen, einen weniger zusammengesetzten Ausdruck für  $F$  anzunehmen. Da sich nun die zum Biegen der Seile erforderliche Kraft  $F$  nahe genug wie die Spannung  $Q$ , wie das Quadrat von der Dicke des Seiles ( $\delta^2$ ) und umge-

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 451

fehrt wie der Halbmesser  $r$  der Rolle verhält, so kann man

$$F = k \frac{\delta^2}{r} Q$$

setzen, wo  $k$  ein aus den Versuchen zu bestimmender Koeffizient ist. Hieraus findet man, weil  $p = \pi \delta$

$$k = \frac{F r}{\delta^2 Q} = \frac{\pi^2 F r}{p^2 Q} \text{ oder } \frac{p^2 Q}{F r} = \frac{\pi^2}{k}.$$

Die Werthe für  $\frac{p^2 Q}{F r}$  sind in der Tafel §. 316.

berechnet. Zur Bestimmung eines Mittelwerthes addire man solche und dividire durch die Anzahl der Versuche, so erhält man

$$\frac{118548,50}{42} = 2822,58 = \frac{\pi^2}{k}$$

oder weil  $\pi^2 = 9,8696$  ist, so erhält man

$$\frac{1}{k} = \frac{2822,58}{9,8696} = 285,98; \text{ also}$$

$$k = \frac{1}{285,98}.$$

Dies giebt  $F = k \frac{\delta^2}{r} Q = \frac{\delta^2 Q}{285,98 r}$ . Weil aber hier  $\delta$  in Linien und  $r$  in Zollen ausgedrückt ist, so muß  $12r$  statt  $r$  gesetzt werden, wenn sich der Halbmesser  $r$  der Rolle auf Fußmaaß beziehen soll. Dies giebt

$$F = \frac{\delta^2 Q}{3431,761}$$

indem, zur Vermeidung der Brüche,  $\delta$  in Linien ausgedrückt beibehalten werden kann. Weil sich aber alle Größen auf das pariser Maaß beziehen (§. 316.), so

ist noch die nöthige Abänderung vorzunehmen, damit der Ausdruck für  $F$  für die hier angenommenen Maße und Gewichte gilt. Giebt man dem gefundenen Ausdrucke folgende Gestalt  $\frac{F}{Q} = \frac{\delta}{r} \cdot \frac{\delta}{3431,76}$ , so läßt sich übersehen, daß  $\frac{F}{Q}$  ungeändert bleibt, wenn  $F$ ,  $Q$  in einerlei Gewicht ausgedrückt werden. Dasselbe gilt in Absicht des Längenmaßes eines jeden Landes für  $\frac{\delta}{r}$ , wenn nur  $r$  in Fuß und  $\delta$  in Linien ausgedrückt wird, deren 144 auf einen Fuß gehen. Es bleibt also nur noch der Ausdruck  $\frac{\delta}{3431,76}$  übrig. Will man nun  $\delta$  nach preussischen Linien in Rechnung bringen, statt daß solches nach pariser Linien geschehen sollte, so müssen die  $\delta$  preussischen Linien in pariser verwandelt werden. Nun ist 1 preussische Linie = 0,96618 pariser, daher erhält man  $\frac{0,96618\delta}{3431,76}$  statt  $\frac{\delta}{3431,76}$ , oder weil  $\frac{0,96618\delta}{3431,76} = \frac{\delta}{3551,9}$ , so kann man um so mehr dafür  $\frac{\delta}{3500}$  annehmen, damit die Kraft  $F$  nicht zu klein gefunden werde. Es ist daher die zum Biegen des Seiles über eine Rolle erforderliche Kraft

$$F = \frac{\delta^2 Q}{3500 r} = \frac{k \delta^2 Q}{r}$$

nur ist bei diesem Ausdrucke wohl zu bemerken, daß  $r$  der Halbmesser der Rolle, in preussischem Fußmaße, und

$\delta$  die Dicke des Seiles in preussischen Linien ausgedrückt werden müssen.

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 453

Uebrigens findet man in demselben Gewichte, worin  $Q$  ausgedrückt wird, auch  $F$ .

Beispiel. Ueber eine Rolle, deren Halbmesser zwei Zoll beträgt, hängt ein 9 Linien dickes Seil. An jedem Ende des Seiles sind 60 Pfund Last befestigt, man sucht die zur Ueberwältigung der Steifigkeit erforderliche Kraft.

Hier ist die Spannung  $Q = 60$  Pfund;  $\delta = 9'''$  und  $r = \frac{1}{4}$  Fuß, daher die gesuchte Kraft

$$F = \frac{9 \cdot 9 \cdot 60}{3500 \cdot \frac{1}{4}} = 8,3 \text{ Pfund.}$$

§. 321.

Aufgabe. Die erforderliche Kraft  $V$  zu finden, welche bei einer festen Rolle mit der Steifigkeit des Seiles, der Reibung am Zapfen und mit der Last  $Q$  im Gleichgewichte ist.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisher angenommenen Bezeichnung, und wenn vorausgesetzt wird, daß die Seile nach vertikalen Richtungen gespannt sind, ist der Vertikaldruck des Zapfens auf die Pfanne  $= V + Q + M$ . Das davon entstehende Moment der Reibung  $= \mu \rho (V + Q + M)$ . Die Spannung des Seiles, welches gebogen wird,  $= Q$ , also die zur Biegung erforderliche Kraft  $= \frac{\delta^2 Q}{3500 r} = \frac{k \delta^2 Q}{r}$  und das Moment derselben  $= k \delta^2 Q$ . Endlich ist das Moment der Last  $= rQ$ , daher für das Gleichgewicht

$$rV = rQ + \mu \rho (V + Q + M) + k \delta^2 Q$$

und man findet hieraus die Kraft



$$(I) \quad V = \frac{(r + \mu \rho + k \delta)^2 Q + \mu \rho M}{r - \mu \rho}$$

wo  $k = \frac{1}{3500}$  ist.

Wird das Gewicht  $M$  der Rolle bei Seite gesetzt, so erhält man

$$(II) \quad V = \frac{r + \mu \rho + k \delta^2}{r - \mu \rho} Q.$$

Beispiel. Mittelfst einer Rolle, welche 12 Pfund wiegt und deren Halbmesser 3 Zoll ist, soll an einem 10 Linien dicken Seile eine Last von 500 Pfund aufgezogen werden; man sucht die erforderliche Kraft, wenn der Halbmesser des Bolzens  $\frac{1}{2}$  Zoll beträgt, und  $\mu = \frac{1}{5}$  ist.

Hier wird  $r = \frac{1}{4}$ ,  $\rho = \frac{1}{24}$  Fuß;  $\delta = 10$  Linien;  $Q = 500$  und  $M = 12$  Pfund, daher ist die Kraft

$$V = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5 \cdot 24} + \frac{100}{3500}\right) 500 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} \cdot 12}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5 \cdot 24}} = 594,00 \text{ Pfund.}$$

Setzt man  $M = 0$ , so wird

$$V = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5 \cdot 24} + \frac{100}{3500}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5 \cdot 24}} \cdot 500 = 593,45 \text{ Pfund}$$

welches nur wenig von 594 verschieden ist.

§. 322.

Aufgabe. Die Kraft  $V$  zu finden, welche bei einer beweglichen Rolle erfordert wird, um der Steifigkeit des Seiles, der Reibung am Zapfen und der Last  $Q$  das Gleichgewicht zu halten.

Auflösung. Man setze das Gewicht der Rolle, an welcher das Gewicht  $Q$  frei hängt  $= M$ , und die  
 Taf. IV. Fig. 90. Spannung des Seiles  $AB$ , Figur 90., welches in

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 455

A befestigt ist  $= S$ . Die Kraft  $V$  wirke nach vertikaler Richtung aufwärts, so ist  $Q$  der Druck des Zapfens gegen die Pfanne, und das Moment der Reibung  $= \mu \rho Q$ . Die Spannung des Seiles, welches gebogen wird, ist  $S$ , daher die Kraft zum Biegen  $= \frac{k \delta^2 S}{r}$ , und deren Moment  $= k \delta^2 S$ . Endlich ist das Moment der Spannung  $= rS$ ; man findet daher das Moment der Kraft  $V$ , welche diesen Momenten das Gleichgewicht halten muß

$$rV = rS + \mu \rho Q + k \delta^2 S.$$

Ferner wird für das Gleichgewicht erfordert

$$S + V = Q + M, \text{ dies giebt } S = Q + M - V, \text{ also}$$

$$rV = (r + k \delta^2) (Q + M) - (r + k \delta^2) V + \mu \rho Q$$

folglich erhält man die gesuchte Kraft

$$(I) \quad V = \frac{(r + k \delta^2)(Q + M) + \mu \rho Q}{2r + k \delta^2} \text{ oder auch}$$

$$V = \frac{(r + k \delta^2 + \mu \rho) Q + (r + k \delta^2) M}{2r + k \delta^2}.$$

Für  $M = 0$  wird

$$(II) \quad V = \frac{r + k \delta^2 + \mu \rho}{2r + k \delta^2} Q.$$

Wollte man die Kraft  $V$  aus der Spannung  $S$  des Seiles  $AB$  finden, so erhält man statt  $rV = rS + \mu \rho Q + k \delta^2 S$ , wenn  $S + V - M$  für  $Q$  gesetzt wird, die Kraft

$$(III) \quad V = \frac{(r + \mu \rho + k \delta^2) S - \mu \rho M}{r - \mu \rho}$$

und für  $M = 0$

$$(IV) \quad V = \frac{r + \mu \rho + k \delta^2}{r - \mu \rho} S$$

welcher Ausdruck mit (II) im vorigen §. übereinkommt.

**Beispiel.** An einer beweglichen Rolle, welche 12 Pfund wiegt und deren Halbmesser 3 Zoll ist, hängt eine Last von 1000 Pfund. Die Dicke des Seiles ist 10 Linien und der Halbmesser des Zapfens  $\frac{1}{2}$  Zoll. Wie viel Kraft wird man anwenden müssen, damit diese Last bei dem kleinsten Ueberschusse an Kraft vertikal aufwärts gezogen wird, wenn  $\mu = \frac{1}{3}$  ist.

Hier wird  $r = \frac{1}{4}$ ,  $\rho = \frac{1}{24}$  Fuß;  $\delta = 10$  Linien,  $Q = 1000$  und  $M = 12$  Pfund, daher ist die Kraft

$$V = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{1200})(1000 + 12) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \cdot 1000}{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1200}} = 549,3 \text{ Pfund.}$$

Für  $M = 0$  wird

$$V = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{1200} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24}}{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1200}} \cdot 1000 = 542,8 \text{ Pfund.}$$

**Anmerkung.** Es könnte scheinen, als wenn man nicht berechtigt wäre, die beiden Spannungen  $S + V$  der Last  $Q + M$  gleich zu setzen, weil ein Theil der Spannung  $V$  auf die Reibung und Steifigkeit des Seiles verwandt wird, und daß man diesen Theil vorher abziehen müßte, ehe man die Spannungen  $S + V$  der Last  $Q + M$  gleich setzen kann. Allein es ist zu erwägen, daß der Erfolg von der auf die Reibung verwandten Kraft kein anderer ist, als daß der Unterstützungspunkt der Last außer der Vertikale durch den Mittelpunkt des Bolzens näher nach der Richtung von  $V$  fällt, wie solches §. 230. auseinander gesetzt ist. Ebenso bewirkt die Kraft, welche von  $V$  auf die Steifigkeit des Seiles verwandt wird, daß sich das Seil  $AB$  biegen muß (§. 313.), weshalb die beiden Kräfte  $S + V$  offenbar  $= Q + M$  seyn müssen. Wollte man mit Herrn Langsdorf (Handbuch der Maschinenlehre 2ter Band, S. 87.) annehmen, daß  $S + V$  größer als  $Q + M$  ist, so denke man sich die ganze Maschine, an welcher die Kräfte  $S, V, Q, M$  wirken, frei schwebend; alsdann müßte solche noch

### III. Von der Steifigkeit der Seile. 457

im Gleichgewichte seyn, wenn sie vorher im Gleichgewichte war. Allein wegen  $S + V > Q + M$  ist alsdann kein Gleichgewicht möglich, weshalb diese Voraussetzung nicht statthaft ist.

#### §. 323.

Außer den Versuchen mit neuen trocknen Seilen hat Coulomb noch andere mit nassen und mit getheerten Seilen angestellt. Er fand, daß die Feuchtigkeit die Biegsamkeit bei dünnen Seilen vermehrt, daß aber dicke Seile, besonders wenn sie von wenig Kraft gespannt werden, unbiegsamer sind, als trockne Seile bei übrigens gleichen Umständen. Dagegen war bei dünnen getheerten Seilen die Steifigkeit, in Vergleichung mit trocknen Seilen von eben den Abmessungen, nur wenig vermehrt, und nur bei dicken getheerten Seilen wurde die Steifigkeit um etwa  $\frac{1}{3}$  größer, als bei trocknen Seilen.

### IV. Von dem Rollen- und Flaschenzuge.

#### §. 324.

Die Verbindung mehrerer einzelner Rollen durch darüber geschlungene Seile, um mit Hülfe derselben eine Last zu heben, heißt ein Rollenzug (*Système de poulies*.) Befinden sich hingegen mehrere Rollen in einerlei Gehäuse oder Hülse über oder neben einander, so daß sich keine Rolle ohne das Gehäuse von der Stelle bewegen kann, so heißt eine solche engere Verbindung der Rollen, ein Kloben oder eine Flasche (*Rechamus. Mouffle*). Die Verbindung zweier Fla-

ſchen mittelſt Seile heißt ein Glaschenzug (*Polyspastus*), wo man, wie bei den Rollen, die bewegliche Flaſche von der unbeweglichen unterſcheidet.

Die gewöhnlichſte Einrichtung eines Rollenzuges Taf. XI. iſt Figur 176. abgebildet, wo an der unterſten beweg-  
Fig. 176. lichen Rolle B die Laſt Q hängt. Ueber derſelben befinden ſich mehr oder weniger bewegliche Rollen wie D, F, und jedes Seil, welches um eine Rolle geht, iſt mit dem einen Ende oberhalb wie bei A, C, E an einer feſten Wand und mit dem andern Ende wie bei D, F, an der Hülſe von der darüber befindlichen Rolle befeſtigt. Das letzte Seil F G H geht über eine Handrolle G (*Poulie de renvoi*), welche feſt iſt, ſo daß mittelſt einer am Ende des Seiles G H angebrachten Kraft V, die Laſt Q gehoben werden kann. Bei dieſer Einrichtung iſt es aber nicht möglich, die Laſt Q bis zur Handrolle G zu erheben, weil ſich D von F und B von D deſto mehr entfernt, je näher die Rolle F nach G kommt.

Die Glaschenzüge können auf mancherlei Art angeordnet werden, wie Figur 177., 178., 179. und 180., wo Figur 177. zu den gewöhnlichſten Einrichtungen gehört. Außer den in jeder Flaſche abgebildeten Rollen können noch mehrere über und neben einander angebracht werden, wobei es jedesmal nur darauf ankommt, daß man den Anfang des Seiles entweder an den unbeweglichen Flaſchen, Figur 177. und 178. in A, oder an den beweglichen Flaſchen, Figur 179. und 180., in A befeſtigt und ſolches zuerſt um

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 459

die kleinsten und dann um die größern herumlegt. Hat die Kraft  $V$ , welche am Ende des Seiles wirkt, eben die Richtung wie die Last  $Q$ , so sind  $HK$ , Figur 177., und  $LM$ , Figur 179., Sandrollen. Will man, daß bei der Anordnung eines Flaschenzuges in beiden Flaschen gleich viel Rollen in jeder Flasche in Thätigkeit kommen sollen, so muß der Anfang  $A$  des Seiles an derjenigen Flasche befestigt werden, um welche das letzte Ende  $V$  des Seiles geschlagen ist, wie bei Figur 177. und 180. Im entgegengesetzten Falle, wie bei Figur 178. und 179., wird allemal an derjenigen Flasche, woran das Seil befestigt ist, eine Rolle weniger als bei der andern Flasche erfordert.

Bei den nachstehenden Untersuchungen wird jedesmal vorausgesetzt werden, daß die Richtung der gespannten Seile parallel ist, weil die etwaige geringe Abweichung von der parallelen Lage bei gut angeordneten Rollen- und Flaschenzügen keinen erheblichen Einfluß auf die Vermehrung der Kraft haben kann. Ebenso wird auch das Gewicht der Seile bei Seite gesetzt werden.

§. 325.

**Aufgabe.** Aus der gegebenen Last  $Q$  beim Rollenzuge die Größe der Kraft  $V$  zu finden, wenn man die Seile als vollkommen biegsam annimmt und die Reibung bei Seite setzt.

**Auflösung.** Die Anzahl der beweglichen Rollen  $B, D, F$ , Figur 177., sey  $n$ ; die Spannung des ersten Seiles  $AB = T'$ , des zweiten  $CD = T''$ , des

Taf. XI.  
Fig. 177.  
n

Dritten  $T''$  u. f. w. und des letzten oder nten Seiles  $(EF) = V'$ , so ist, wenn das Gewicht einer jeden beweglichen Rolle  $= M$  ist, nach §. 171.

M

$$T' = \frac{1}{2} (Q + M).$$

Weil aber das Seil BD ebenfalls mit der Kraft  $T'$  gespannt ist, so wird aus ähnlichen Gründen  $T'' = \frac{1}{2} (T' + M)$  oder wenn man für  $T'$  seinen Wert setzt

$$T'' = \frac{1}{4} Q + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) M = \frac{1}{2^2} Q + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1}\right) M;$$

$$T''' = \frac{1}{2} (T'' + M) = \frac{1}{2^3} Q + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1}\right) M$$

und man erhält auf eine ähnliche Art die Spannung für das letzte oder nte Seil

$$V' = \frac{1}{2^n} Q + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1}\right) M$$

$$\text{oder } V' = \frac{1}{2^n} Q + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) M.$$

Die Zahlen in der Parenthese bilden eine geometrische Reihe, von welcher  $n$  die Anzahl der Glieder und  $\frac{1}{2}$  der Exponent ist, daher findet man die Summe dieser Reihe

$$\frac{\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Es ist daher

$$V' = \frac{1}{2^n} Q + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) M = \frac{Q - M}{2^n} + M.$$

Nun ist  $V'$  die Spannung des letzten Seiles EF, welche der Spannung des Seiles FG gleich ist, und

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 461

ist dadurch, daß dieses Seil über die Handrolle geht, die Spannung nicht geändert wird, so ist auch die Spannung des Seiles  $GH = V'$ . Zur Erhaltung des Gleichgewichtes muß aber die Kraft  $V$  der Spannung  $V'$  gleich seyn, daher erhält man  $V' = V$  und man findet die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft

$$(I) \quad V = \frac{Q - M}{2^n} + M$$

wo  $n$  die Anzahl der beweglichen Rollen bezeichnet. Wird das Gewicht der Rollen bei Seite gesetzt, so ist  $M = 0$ , also

$$(II) \quad V = \frac{1}{2^n} Q.$$

Beispiel. An einem Rollenzuge sind drei bewegliche Rollen, wovon jede 12 Pfund wiegt; man sucht die Kraft  $V$ , welche erfordert wird, einer Last von 800 Pfund das Gleichgewicht zu halten. Hier ist  $Q = 800$ ,  $M = 12$  Pfund und  $n = 3$ , daher die Kraft

$$V = \frac{1}{8} (800 - 12) + 12 = 110\frac{1}{2} \text{ Pfund.}$$

Für  $M = 0$  ist

$$V = \frac{1}{8} : 800 = 100 \text{ Pfund.}$$

§. 326.

Zusatz. Aus der gegebenen Kraft  $V$ , dem Gewichte  $M$  und der Anzahl der Rollen findet man die Last

$$(I) \quad Q = 2^n (V - M) + M$$

und wenn man die erforderliche Anzahl der beweglichen Rollen sucht, so ist

$$2^n = \frac{Q - M}{V - M} \text{ also } \log 2^n = n \log 2 = \log \frac{Q - M}{V - M} \text{ oder}$$

$$(II) \quad n = \frac{\log(Q - M) - \log(V - M)}{\log 2}.$$



Wird durch die Rechnung für  $n$  keine ganze Zahl gefunden, so muß statt des Bruches eine Einheit mehr gerechnet werden, in welchem Falle die Kraft  $V$  verhältnißmäßig etwas kleiner angenommen werden kann.

Beispiel. Man sucht die Anzahl der erforderlichen beweglichen Rollen bei einem Rollenzuge, wenn jede Rolle 12 Pfund wiegt, und mit einer Kraft von  $110\frac{1}{2}$  Pfund eine Last von 800 Pfund das Gleichgewicht gehalten werden soll. Hier ist  $V = 110\frac{1}{2}$ ,  $Q = 800$  und  $M = 12$  Pfund, daher

$$\log (Q - M) = \log 788 = 2,8965262$$

$$\log (V - M) = \log 98,5 = 1,9934362$$


---


$$0,9030900$$

$\log 2 = 0,3010300$ ; folglich ist die Anzahl der beweglichen Rollen oder

$$n = \frac{0,9030900}{0,3010300} = 3.$$

§. 327.

Aufgabe. Die Kraft  $V$  bei einem Rollenzuge zu finden, welche mit der Last  $Q$ , der Reibung an den Rollzapfen und der Steifigkeit der Seile das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Man bezeichne durch  
 $r$  den Halbmesser jeder Rolle,  
 $\rho$  den Halbmesser jedes Rollzapfens,  
 $\delta$  die Dicke des Seiles (in Linien ausgedrückt)  
 $M$  das Gewicht jeder Rolle, und durch  
 $n$  die Anzahl der beweglichen Rollen.

Ferner sey

$$A = \frac{r + k\delta^2 + \rho e}{2r + k\delta^2} \text{ und } B = \frac{r + k\delta^2}{2r + k\delta^2}$$

auch bezeichne man durch

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 463

$T'$  die Spannung des ersten Seiles BD, Figur 176. Taf. XI.

$T''$  die Spannung des zweiten Seiles DF, Fig. 176.

$T'''$  die Spannung des dritten Seiles,

u. s. w. und durch

$V'$  die Spannung des nten oder letzten Seiles FG,

so ist §. 322. I.

$$T' = A Q + B M$$

$$T'' = A T' + B M$$

$$T''' = A T'' + B M \text{ u. s. w.}$$

und wenn man die Werthe für  $T'$ ,  $T''$  ... in die darauf folgenden Gleichungen setzt, so wird:

$$T' = A Q + B M$$

$$T'' = A^2 Q + (1 + A) B M$$

$$T''' = A^3 Q + (1 + A + A^2) B M$$

$$- - - - -$$

$$V' = A^n Q + (1 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) B M.$$

Nun ist die Summe der geometrischen Progression

$$1 + A + A^2 + \dots + A^{n-1} = \frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^n}{1 - A}, \text{ daher}$$

die Spannung des Seiles FG oder

$$V' = A^n Q + \frac{1 - A^n}{1 - A} B M.$$

Man setze

$$C = \frac{r + k \delta^2 + \mu p}{r - \mu p}; \quad D = \frac{\mu p}{r - \mu p}$$

und die Spannung des Seiles GH =  $V''$ , so ist §. 321. I.

$$V'' = C V' + D M, \text{ daher}$$

$$V'' = A^n C Q + \frac{1 - A^n}{1 - A} B C M + D M$$

oder weil die Spannung  $V''$  der Kraft  $V$  gleich seyn

muß, so erhält man die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft

$$(I) \quad V = A^n C Q + \frac{1-A^n}{1-A} B C M + D M.$$

Setzt man das Gewicht der Rollen bei Seite, so wird  $M = 0$ , also

$$(II) \quad V = A^n C Q = \frac{(r + k \delta^2 + \mu \rho)^{n+1}}{(2r + k \delta^2)^n (r - \mu \rho)} Q.$$

Beispiel. Ein Rollenzug besteht aus drei beweglichen Rollen, deren jede 6 Zoll im Durchmesser hat und 12 Pfund wiegt; der Halbmesser jedes Rollzapfens ist  $\frac{1}{2}$  Zoll und die Dicke des Seiles 10 Linien; man sucht die erforderliche Kraft, welche einer Last von 800 Pfund das Gleichgewicht hält.

Hier ist  $r = \frac{3}{4}$ ,  $\rho = \frac{1}{24}$  Fuß;  $\delta = 10$  Linien;  $Q = 800$ ,  $M = 12$  Pfund, und  $n = 3$ . Setzt man nun  $\mu = \frac{1}{6}$ , so ist, weil §. 320.  $k = \frac{1}{3300}$ , der Werth von

$$A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1000}{3300} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}}{2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1000}{3300}} = \frac{0,28551}{0,52857} = 0,5401$$

$$A^n = A^3 = 0,1576$$

$$B = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1000}{3300}}{2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1000}{3300}} = 0,5270$$

$$C = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1000}{3300} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1746$$

$$D = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}} = 0,0244 \text{ und}$$

$$\frac{1-A^n}{1-A} = \frac{0,8424}{0,4599} = 1,8317$$

daher findet man die Kraft

$$V = 0,1576 \cdot 1,1746 \cdot 800 + 1,8317 \cdot 0,527 \cdot 1,1746 \cdot 12 + 0,0244 \cdot 12 = 148,093 + 10,808 + 0,293 = 159,19 \text{ Pfund.}$$

Wollte man das Gewicht  $M$  der Rollen bei Seite setzen, so findet man

$$V = 0,1576 \cdot 1,1746 \cdot 800 = 148,09 \text{ Pfund.}$$

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 465

Diese Rechnungen können am leichtesten mit Hilfe der Logarithmen ausgeführt werden.

##### §. 328.

**Zusatz.** Sollte man aus der gegebenen Kraft und den übrigen Abmessungen eines Rollenzuges die Größe der Last  $Q$  bestimmen, so erhält man, wenn diese aus der zuletzt gefundenen Formel entwickelt wird, die Last

$$Q = \frac{V - DM}{A^n C} - \frac{(1 - A^n) BM}{(1 - A) A^n}.$$

Soll hingegen die Anzahl der beweglichen Rollen gesucht werden, so ist

$$A^n = \frac{(1 - A)(V - DM) - BCM}{(1 - A)CQ - BCM}, \text{ folglich}$$

$$n = \frac{\log[(1 - A)(V - DM) - BCM] - \log[(1 - A)CQ - BCM]}{\log A}.$$

##### §. 329.

**Aufgabe.** Bei dem Flaschenzuge die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft zu finden, wenn auf die Steifigkeit der Seile und auf die Reibung nicht Rücksicht genommen wird.

**Auflösung.** Es sey  $V$  die gesuchte Kraft,  $Q$  die gegebene Last,  $M$  das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche und  $m$  die Anzahl der gespannten Seile, an welchen die Last hängt, so ist die Kraft

$$V = \frac{Q + M}{m}.$$

Denn im Zustande des Gleichgewichts müssen die vollkommen biegsamen Seile gleich stark gespannt seyn, also ist die Summe von den Spannungen der Seile,

an welchen die Last  $Q + M$  hängt, eben so groß als diese Last. Jedes Seil ist aber mit derselben Kraft  $V$  gespannt, welche an dem letzten Seile wirkt, daher  $mV = Q + M$ .

Um dies noch mehr zu erläutern, bemerke man, daß, Figur 177., die Last  $Q + M$  an den vier Seilen  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$  hängt; es ist daher hier  $V = \frac{1}{4} (Q + M)$  und wenn gleich noch das Seil  $KL$  vorhanden ist, so kann dasselbe doch nicht mit gerechnet werden, weil solches die Last nicht trägt, und es zur Erhaltung der Last gleichgültig ist, ob dieses Seil über die Handrolle  $HK$  geht, oder ob solches ohne Handrolle, wie Figur 178., nach verticaler Richtung  $GH$  aufwärts gezogen wird; in welchem Falle dennoch die Last an vier Seilen hängt, obgleich alsdann nur drei Rollen erfordert werden. Eben so hängt die Last  $Q + M$ , Figur 179. und 180., an fünf Seilen; es ist daher hier  $V = \frac{1}{5} (Q + M)$ .

### §. 330.

**Aufgabe.** An einem Flaschenzuge befinden sich  $m$  gleich große Rollen; man sucht die Kraft  $V$ , welche der Last  $Q$ , der Steifigkeit der Seile und der Reibung an den Rollzapfen das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** So fern alle Rollen in den Flaschen von gleicher Größe sind, so können solche nicht über einander angebracht werden, sondern es wird erfordert, daß sie sich neben einander befinden. Man muß sich daher vorstellen, daß  $BC$  und  $DE$ , Figur 181., die vordern Rollen einer jeden Flasche sind, hin-

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 467

ter welchen sich noch mehrere befinden können. Es bezeichne nun

$r$  den Halbmesser jeder Rolle,

$\rho$  den Halbmesser des Rollzapfens,

$\delta$  die Dide des Seiles (in Linien ausgedrückt),

$M$  das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche, und

$n$  die Anzahl der Rollen, welche mit der Anzahl der Seile, woran die Last hängt, gleich groß ist.

Ferner setze man

$$C = \frac{r + k\delta^2 + \mu\rho}{r - \mu\rho}$$

und bezeichne durch

$T'$  die Spannung des ersten Seiles  $AB$ ,

$T''$  die Spannung des zweiten Seiles  $CD$ ,

$T'''$  die Spannung des dritten Seiles  $EB$ ,

$T^{(n)}$  die Spannung des vierten Seiles (bei  $CD$ ) u. s. w.

und durch

$V'$  die Spannung des  $n$ ten oder letzten Seiles (bei  $CD$ ).

Es ist daher §. 322. IV., wenn man das Gewicht der einzelnen Rollen bei Seite setzt,

$$T'' = CT'; \quad T''' = CT''; \quad T^{(n)} = CT^{(n-1)}; \dots$$

oder wenn alles durch  $C$  und  $T'$  ausgedrückt wird

$$T' = 1 \cdot T'$$

$$T'' = C \cdot T'$$

$$T''' = C^2 \cdot T'$$

$$T^{(n)} = C^3 \cdot T'$$

$$- - - - -$$

$$V' = C^{n-1} T'.$$

Soll ein Gleichgewicht entstehen, so müssen die Span-

nungen der Seile, woran die Last hängt, der Last gleich seyn, also

$$T' + T'' + T''' + \dots + V' = Q + M \text{ oder}$$

$$(1 + C + C^2 + C^3 + \dots + C^{m-1}) T' = Q + M$$

oder weil die Summe der geometrischen Progression

$$1 + C + C^2 + C^3 + \dots + C^{m-1} = \frac{C \cdot C^{m-1} - 1}{C - 1} = \frac{C^m - 1}{C - 1}$$

so erhält man

$$\frac{C^m - 1}{C - 1} T' = Q + M \text{ oder } T' = \frac{(C - 1)(Q + M)}{C^m - 1}. \text{ Aber}$$

$$V' = C^{m-1} T' \text{ daher } T' = \frac{V'}{C^{m-1}}, \text{ folglich}$$

$$V' = \frac{C^{m-1} (C - 1)(Q + M)}{C^m - 1} = \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1} (Q + M)$$

welches die Spannung von dem mten oder letzten Seile bei CD ist. Dieses Seil muß aber noch um die Handrolle bei DE gebogen werden, wenn es in die Lage EF kommen soll. Man setze daher die Spannung des Seiles EF = V, so ist §. 321. II

$$V = C V' \text{ oder } V = C \cdot \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1} (Q + M); \text{ oder,}$$

weil die Spannung des Seiles EF mit der an diesem Seile erforderlichen Kraft gleich groß ist, so findet man die Kraft

$$V = \frac{C^{m+1} - C^m}{C^m - 1} (Q + M).$$

$$\text{wo } C = \frac{r + k \delta^2 + \mu e}{r - \mu e} \text{ ist.}$$

Beispiel. An einem Flaschenzuge befinden sich acht gleich große Rollen, jede von  $3\frac{1}{2}$  Zoll im Halbmesser. Der Halbmesser des Rollzapfens ist  $\frac{1}{2}$  Zoll und die Dicke des

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 469

Seiles 10 Linien; man sucht die erforderliche Kraft, um bei dieser Einrichtung mit dem kleinsten Ueberschusse eine Last von 900 Pfund in die Höhe zu heben, wenn das Gewicht der untern Flasche 100 Pfund beträgt.

Auflösung. Hier ist  $r = \frac{3\frac{1}{2}}{12} = \frac{7}{24}$ ,  $e = \frac{1}{24}$  Fuß;  
 $\delta = 10$  Linien;  $Q = 900$ ,  $M = 100$  Pfund und  $m = 8$ .  
 Ferner ist  $k = \frac{1}{3500}$  und wenn  $\mu = \frac{1}{5}$  gesetzt wird, so erhält man

$$C = \frac{\frac{1}{24} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{24} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1596$$

$$\log C = \log 1,1596 = 0,0643082$$

$$\log C^8 = 8 \log 1,1596 = 0,5144656 = \log 3,2694$$

$$\log C^9 = 9 \log 1,1596 = 0,5787738 = \log 3,7912, \text{ also}$$

$$C^{m+1} = C^9 = 3,7912$$

$$C^m = C^8 = 3,2694$$

$$C^{m+1} - C^m = 0,5218 \text{ folglich}$$

$$V = \frac{0,5218}{2,2694} (900 + 100) = 229,9 \text{ Pfund.}$$

Wird die Reibung und Steifigkeit der Seile bei Seite gesetzt, so wäre §. 329.  $V = \frac{1000}{8} = 125$  Pfund, also wird in dem vorliegenden Falle lediglich auf Reibung und Steifigkeit eine Kraft von 104,9 Pfund verwendet.

§. 331.

Zusatz. Zieht die Kraft nicht abwärts, sondern vertikal aufwärts der Richtung der Last entgegen, so darf das letzte Seil nicht über die Handrolle gebogen werden. Setzt man in diesem Falle die zur Erhaltung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft  $= V'$ , so ist

$$V' = \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1} (Q + M).$$



## §. 332.

**Aufgabe.** Aus der gegebenen Last und Kraft bei einem Flaschenzuge von gleich großen Rollen, die für das Gleichgewicht erforderliche Anzahl der Rollen zu finden, wenn die übrigen Abmessungen des Flaschenzuges bekannt sind.

**Auflösung.** Nach §. 330. ist

$$V (C^m - 1) = (C^{m+1} - C^m) (Q + M) \text{ oder}$$

$$C^m V - V = C^m (C - 1) (Q + M) \text{ also}$$

$$C^m = \frac{V}{V - (C - 1)(Q + M)}; \text{ und man findet, weil } \log C^m = m \log C \text{ ist, die erforderliche Anzahl der Seile, woran die Last hängt, welche mit der Anzahl der Rollen gleich ist}$$

$$m = \frac{\log V - \log [V - (C - 1)(Q + M)]}{\log C}.$$

Findet man für  $m$  keine gerade Zahl, so muß die nächst größere gerade Zahl dafür angenommen werden, weil nach der vorausgesetzten Anordnung in jeder Flasche gleich viel Rollen seyn müssen.

## §. 333.

**Aufgabe.** Aus den gegebenen Abmessungen eines Flaschenzuges, welcher aus  $n$  Paar Rollen von zweierlei Durchmessern besteht, die Kraft  $V$  zu finden, welche einer gegebenen Last  $Q$ , der Steifigkeit der Seile und der Reibung an den Rollzapfen das Gleichgewicht hält.

Taf. XI.

Fig. 177.

**Auflösung.** Der Flaschenzug habe die Einrichtung Figur 177., wo man sich hinter jeden Rollen

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 471

noch die erforderliche Anzahl hinzu denken kann. Man bezeichne durch

**a** den Halbmesser der kleinen Rollen BC, DE,

**b** den Halbmesser der großen Rollen FG, HK,

**$\alpha$**  den Halbmesser des Zapfens der kleinen Rollen,

**$\beta$**  den Halbmesser des Zapfens der großen Rollen,

**$\delta$**  die Dicke des Seiles (in Linien)

**M** das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche,

**n** die halbe Anzahl sämmtlicher Rollen, welche mit der halben Anzahl der Seile, woran die Last hängt, übereinkommt.

Ferner setze man

$$C = \frac{a + k\delta^2 + \mu\alpha}{a - \mu\alpha}; \quad E = \frac{b + k\delta^2 + \mu\beta}{b - \mu\beta}$$

und bezeichne bei den kleinen Rollen durch

**t'** die Spannung des ersten Seiles AB,

**t''** die Spannung des zweiten Seiles CD,

**t'''** die Spannung des dritten Seiles EB,

**t''''** die Spannung des vierten Seiles bei CD u. s. w.

und durch

**v'** die Spannung des nten oder letzten Seiles an den kleinen Rollen bei CD.

Ferner bezeichne man auf eine ähnliche Art bei den großen Rollen durch

**T'** die Spannung des ersten Seiles EF,

**T''** die Spannung des zweiten Seiles GH,

**T'''** die Spannung des dritten Seiles KF u. s. w.

und durch

**V'** die Spannung des nten oder letzten Seiles bei

GH, so ist nach §. 322. IV., wenn man das Gewicht der einzelnen Rollen bei Seite setzt, wie §. 330.

$$t' = 1 \cdot t'$$

$$t'' = C \cdot t'$$

$$t''' = C^2 t'$$

$$t^{(4)} = C^3 t'$$

$$- - -$$

$$v' = C^{n-1} t'$$

Eben so findet man bei den großen Rollen

$$T' = 1 \cdot T'$$

$$T'' = E \cdot T'$$

$$T''' = E^2 \cdot T'$$

$$- - -$$

$$V' = E^{n-1} T'$$

Das Gleichgewicht zwischen der Last  $(Q + M)$  und sämtlichen Spannungen erfordert

$$Q + M = t' + t'' + t''' + \dots + v' + T' + T'' + T''' + \dots + V' \text{ oder}$$

$$Q + M = (1 + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) t' + (1 + E + E^2 + \dots + E^{n-1}) T'.$$

Es ist aber

$$1 + C + C^2 + \dots + C^{n-1} = \frac{C^n - 1}{C - 1} \text{ und}$$

$$1 + E + E^2 + \dots + E^{n-1} = \frac{E^n - 1}{E - 1}, \text{ daher}$$

$$Q + M = \frac{C^n - 1}{C - 1} t' + \frac{E^n - 1}{E - 1} T' \quad [I]$$

Ferner war nach dem Vorhergehenden

$$V' = E^{n-1} T' \text{ also } T' = \frac{V'}{E^{n-1}}.$$

#### IV. Von dem Rollen- u. Flaschenzuge. 473

Aus der Spannung  $v'$  des  $n$ -ten Seiles findet man (§. 322.) die Spannung  $T'$  des folgenden

$$T' = C v' \text{ also } v' = \frac{T'}{C}. \text{ Es ist aber auch}$$

$$v' = C^{n-1} t' \text{ also } t' = \frac{v'}{C^{n-1}} \text{ oder}$$

$$t' = \frac{T'}{C C^{n-1}} = \frac{T'}{C^n} = \frac{V'}{C^n E^{n-1}}.$$

Setzt man die für  $t'$ ,  $T'$  gefundenen Werthe in die Gleichung [I], so erhält man

$$Q + M = \frac{C^n - 1}{C - 1} \cdot \frac{V'}{C^n E^{n-1}} + \frac{E^n - 1}{E - 1} \cdot \frac{V'}{E^{n-1}} \text{ oder}$$

$$Q + M = \frac{(C^n - 1)(E - 1) + C^n (C - 1)(E^n - 1)}{C^n E^{n-1} (C - 1)(E - 1)} \cdot V'$$

und hieraus

$$V' = \frac{C^n E^{n-1} (C - 1)(E - 1)(Q + M)}{C^n (C - 1)(E^n - 1) + (C^n - 1)(E - 1)}.$$

Das letzte Seil bei G H, dessen Spannung  $V'$  ist, muß noch um die letzte Rolle bei H K gebogen werden, um in die Lage K L zu kommen. Nun ist die Spannung des Seiles K L der Kraft  $V$  gleich, daher (§. 321.)  $V = E V'$ , also  $V' = \frac{V}{E}$  oder wenn statt  $V'$  der gefundene Werth gesetzt wird, so erhält man ganz allgemein die zur Erhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft

$$V = \frac{C^n E^n (C - 1)(E - 1)(Q + M)}{C^n (C - 1)(E^n - 1) + (C^n - 1)E - 1}$$

$$\text{wo } C = \frac{a + k \delta^2 + \mu \alpha}{a - \mu \alpha}$$

$$E = \frac{b + k \delta^2 + \mu \beta}{b - \mu \beta} \text{ und}$$

$n$  die halbe Anzahl der Rollen oder  $2n$  die Anzahl sämtlicher Seile bezeichnet, woran die Last hängt.

Beispiel. Ein Flaschenzug von zweierlei Rollen in jeder Flasche 4, also überhaupt 8 Rollen, und man zieht mittelst desselben eine Last von 900 Pfund in die Höhe; wie viel Kraft wird zur Ueberwältigung dieser Last und der übrigen Hindernisse der Bewegung erfordert, wenn das Gewicht der untern Flasche 100 Pfund, der Halbmesser der großen Rollen 4 Zoll, der kleinen 3 Zoll, der Halbmesser der Bolzen  $\frac{1}{2}$  Zoll und die Dicke des Seiles 10 Linien beträgt?

Hier ist  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha = \beta = \frac{1}{24}$  Fuß;  $\delta = 10$  Linien;  $Q = 900$ ,  $M = 100$  Pfund und  $n = 4$ ; daher, weil  $k = \frac{1}{8100}$  ist, und wenn  $\mu = \frac{1}{3}$  gesetzt wird, findet man

$$C = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{8100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1872$$

$$E = \frac{\frac{1}{3} + \frac{100}{8100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1392$$

$$\log C = \log 1,1872 = 0,0745239$$

$$\log C^4 = 4 \log 1,1872 = 0,2980956 = \log 1,9866$$

$$\log E = \log 1,1392 = 0,0566000$$

$$\log E^4 = 4 \log 1,1392 = 0,2264000 = \log 1,6842$$

$$\log (C - 1) = \log 0,1872 = 0,2773058 - 1$$

$$\log (C^4 - 1) = \log 0,9866 = 0,9941411 - 1$$

$$\log (E - 1) = \log 0,1392 = 0,1436392 - 1$$

$$\log (E^4 - 1) = \log 0,6842 = 0,8351831 - 1$$

$$\log (Q + M) = \log 1000 = 3,0000000$$

$$0,2980956$$

$$0,2264000$$

$$0,2773058 - 1$$

$$0,1436392 - 1$$

$$3,0000000$$

$$1,9454406 = \log [C^4 E^4 (C - 1) (E - 1) (Q + M)] = \log 88,19432$$

2980956

2773058 — 1

8351831 — 1

105845 — 1 =  $\log [C^n (C - 1) (E^n - 1)] = \log 0,25738$

9941411 — 1

1436392 — 1

1377803 — 1 =  $\log [(C^n - 1) (E - 1)] = \log 0,13733$

Hieraus erhält man die Kraft

$$V = \frac{88,19432}{0,25738 + 0,13733} = 223,4 \text{ Pfund.}$$

§. 334.

**Zusatz.** Will man die weitläufige Rechnung des vorigen §. ersparen, und sich mit einem ziemlich nahen Werthe begnügen, so darf man nur zwischen den Halbmessern  $a, b$  der Rollen und zwischen den Halbmessern  $\alpha, \beta$  ihrer Zapfen das arithmetische Mittel nehmen und nach §. 330. so rechnen, als wenn die Rollen und Zapfen von gleicher Größe wären. Für das Beispiel des vorigen §. erhält man  $\frac{a + b}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3\frac{1}{2}$ , und wenn hienach der Werth von der Kraft  $V$  gesucht wird, so findet man nach §. 330.  $V = 229,9$  Pfund, statt daß nach dem vorigen §.  $V = 223,4$  Pfund seyn sollte.

Ende des ersten Bandes.

---



A

A

C

E

G

M

16

G

N

K

Q

P

A

R

E

C

D



257 12/03 11  
32607 SUI









80439458



80439458



89089818355



B89089818355A

**General Library System  
University of Wisconsin-Madison  
728 State Street  
Madison, WI 53706-1494  
U.S.A.**